Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 06 - Lösungen

Stilianos Louca

29. Mai 2008

Aufgabe 01

Sei $\mathscr{A}$ der Affine Raum über den $\mathbb{K}$-Vektorraum V.

a) Zeigen: $\forall\ a \in \mathscr{A} : \vec{aa} = \vec{0}$. Es ist

$$a = a + \vec{aa} = a + \vec{aa} + \vec{aa}$$

Wegen der Eindeutigkeit von $\vec{aa}$ muss $\vec{aa} = \vec{aa} + \vec{aa}$ sein. Jedoch gibt es in V genau ein inverses $-\vec{aa}$ so dass gilt

$$\vec{0} = \vec{aa} - \vec{aa} = \vec{aa} + \vec{aa} - \vec{aa} = \vec{aa} \quad \square$$

b) Somit ist insbesondere

$$a + \vec{0} = a + \vec{aa} = \vec{a}$$

c) Zeigen: Für beliebige $a, b \in \mathscr{A}$ ist $\vec{ba} = -\vec{ab}$. Definitionsgemäß ist

$$a + \vec{ab} = b\ ,\ \ a = b + \vec{ba}$$

also

$$b + \vec{ba} + \vec{ab} = b$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von $\vec{bb}$ und eines Inversen $-\vec{ab}$ muss also gelten

$$\vec{0} = \vec{bb} = \vec{ba} + \vec{ab} \ \Rightarrow\ \vec{ba} = -\vec{ab} \quad \square$$

d) Für $a, b, c \in \mathscr{A}$ gilt

$$a + \vec{ab} + \vec{bc} = \left(a + \vec{ab}\right) + \vec{bc} = b + \vec{bc} = c$$

Aufgrund der Eindeutigkeit von $\vec{ac}$ muss also gelten

$$\vec{ab} + \vec{bc} = \vec{ac}$$

Aufgabe 02

Sei F die gesuchte affine Abbildung. Setzen $a_0 := (0, 1)$ so dass gilt:

$$F(a_0) = (-1, 1) =: F_0$$

Dann ist F vollständig beschrieben durch eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für die gilt

$$F(a_0 + v) = F_0 + f(v)$$

Insbesondere also:

$$(0,2) = F(1,1) = F(a_0 + (1,0)) \stackrel{!}{=} F_0 + f(1,0) = (-1,1) + f(1,0) \;\rightarrow\; f(1,0) = (1,1)$$

$$(-1,0) = F(1,0) = (a_0 + (1,-1)) \stackrel{!}{=} F_0 + f(1,-1) = (-1,1) + f(1,-1) \;\rightarrow\; f(1,-1) = (0,-1)$$

Durch den Satz der linearen Fortsetzung ist f eindeutig bestimmt, da $(0,1),\ (1,-1)$ eine Basis in $\mathbb{R}^2$ bilden. Außerdem sieht man dass

$$h(x,y) := (x+y, x+2y)$$

auf dieser Basis mit f übereinstimmt (wenn hingucken nicht funktioniert, bekannte Methoden zur Matrix-Bestimmung einer linearen Abbildung anwenden). somit muss $h \equiv f$ sein, das heißt F ist gegeben durch:

$$F(x,y) = F(a_0) + f((x,y) - a_0) = (-1,1) + f(x, y-1) = (-1,1) + (x+y-1, x+2y-2)$$

Aufgabe 03

a) Seien End_N bzw. Aut_N die Menge aller Endomorphismen bzw. Automorphismen über $(N,+)$. Ein Automorphismus $f : N \to N$ auf einer Gruppe N ist ein bijektiver Endomorphismus.

- **Abgeschlossenheit:** Für beliebige Automorphismen $f, g \in \mathrm{Aut}_N$ ist auch die Verkettung $f \circ g \in \mathrm{Aut}_N$. Denn Verkettung von Homomorphismen ergibt wieder Homomorphismen:

$$\forall\ a,b \in \mathbb{N} : f(g(a+b)) \stackrel{g \in \mathrm{End}_N}{=} f(g(a) + g(b)) \stackrel{f \in \mathrm{End}_N}{=} f(g(a)) + f(g(b))$$

  und der inverse Automorphismus zu $f \circ g$ ist gegeben durch $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ denn: Da f^{-1}, g^{-1} Homomorphismen sind, ist auch $g^{-1} \circ f^{-1}$ ein Homomorphismus, und es gilt:

$$f \circ \underbrace{g \circ g^{-1}}_{\mathrm{Id}} \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = \mathrm{Id} = g^{-1} \circ g = g^{-1} \circ \underbrace{f^{-1} \circ f}_{\mathrm{Id}} \circ g$$

- **Assoziativität:** Verkettung von Abbildungen ist bekanntlich assoziativ. Somit ist insbesondere Verkettung von Automorphismen assoziativ.
- **Neutrales Element:** Das neutrale Element ist gegeben durch die Identität Id:

$$\forall\ f \in \mathrm{Aut}_N : f \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id} \circ f = f$$

- **Inverses:** Definitionsgemäß gibt es zu jedem Automorphismus $f \in \mathrm{Aut}_N$ einen *inversen* Automorphismus $g \in \mathrm{Aut}_N$:

$$g \circ f = f \circ g = \mathrm{Id}$$

Somit ist $(\mathrm{Aut}_N, \circ)$ eine Gruppe. $\square$

b) Des Klarheit zu liebe bezeichne $+$ die Operation auf den Gruppen N und H, und $0_n, 0_h$ jeweils das neutrale Element in N und H.

- **Abgeschlossenheit:** Offensichtlich ist

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, h_2) = (\underbrace{n_1 + \varphi_{h_1}(n_2)}_{\in N},\ \underbrace{h_1 + h_2}_{\in H})$$

  auch wieder in $N \times H$.
- **Assoziativität:** Für beliebige $(n_i, h_i) \in N \times H,\ i = 1,2,3$ gilt

$$(n_1,h_1) \circ [(n_2,h_2) \circ (n_3,h_3)] = (n_1,h_1) \circ (n_2 + \varphi_{h_2}(n_3),\ h_2 + h_3) = (n_1 + \varphi_{h_1}(n_2 + \varphi_{h_2}(n_3)),\ h_1 + (h_2 + h_3))$$

$$= (n_1 + \varphi_{h_1}(n_2) + \varphi_{h_1}(\varphi_{h_2}(n_3)),\ (h_1+h_2) + h_3) = ((n_1 + \varphi_{h_1}(n_2)) + \underbrace{\varphi_{h_1+h_2}}_{\varphi_{h_1} \circ \varphi_{h_2}}(n_3), (h_1+h_2) + h_3)$$

$$= (n_1 + \varphi_{h_1}(n_2), h_1 + h_2) \circ (n_3, h_3) = [(n_1,h_1) \circ (n_2,h_2)] \circ (n_3,h_3)$$

- **(Rechts)Neutrales Element:** Bekanntlich (LAAG1) gilt für Homomorphismen $f : G_1 \to G_2$ zwischen den Gruppen G_1, G_2 mit neutralem Element $0_1, 0_2$ die Beziehung:

$$f(0_1) = 0_2$$

Somit ist insbesondere $\varphi_{h_1}(0_n) = 0_n$ für beliebiges $h_1 \in H$ (da φ_{h_1} Homomorphismus zwischen N und N ist). Das (rechts)neutrale Element ergibt sich somit als

$$(0_n, 0_h)$$

denn es ist:

$$\forall\ (n_1, h_1) : (n_1, h_1) \circ (0_n, 0_h) = (n_1 + \underbrace{\varphi_{h_1}(0_n)}_{0_n},\ h_1 + 0_h) = (n_1, h_1)$$

- **(Rechts)Inverses:** Sei $(n_1, h_1) \in N \times H$ beliebig. Da für beliebiges φ_{h_1} ein Automorphismus ist, ist er insbesondere surjektiv. Somit gibt es ein Element n_2 so dass $\varphi_{h_1}(n_2) = n_1^{-1} = -n_1$ ist. Somit ist

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, -h_1) = (n_1 + \underbrace{\varphi_{h_1}(n_2)}_{-n_1},\ h_1 - h_1) = (0_n, 0_h)$$

das heißt es ist $(n_1, h_1)^{-1} = (n_2, -h_1)$.

Somit ist $(N \times H, \circ)$ eine Gruppe. $\square$

c) Sei $\mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$ die Menge aller Affinitäten $F : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ des affinen Raumes $\mathscr{A}$ über den $\mathbb{K}$-Vektorraum V. Zeigen: $\mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$ ist eine Gruppe bzgl. der Verkettung $\circ$ von Abbildungen.

- **Abgeschlossenheit:** Seien $F, G \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$ mit den jeweiligen zugehörigen Isomorphismen $f, g : V \to V$, beliebig. Verkettungen bijektiver Abbildungen sind bekanntlich wieder bijektiv. Analog sind auch Verkettungen affiner Abbildungen wieder affin, denn

$$\forall\ a \in \mathscr{A},\ v \in V :\ (G \circ F)(a + v) = G(F(a + v)) = G(F(a) + f(v)) = G(F(a)) + g(f(a)) = (G \circ F)(a) + (g \circ f)(v)$$

Da f, g Isomorphismen sind, ist auch $g \circ f$ ein Isomorphismus und $G \circ F$ ist sowieso eine Abbildung von $\mathscr{A}$ nach $\mathscr{A}$. Somit ist $G \circ F$ auch eine Affinität und deshalb in $\mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$.

- **Assoziativität:** Folgt direkt aus Assoziativität von Verkettung.
- **(Rechts)Neutrales Element:** Die Identitätsabbildung $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ auf $\mathscr{A}$ ist natürlich rechtsneutral. Ferner ist sie selbst eine Affinität, denn für beliebige $a \in \mathscr{A},\ v \in V$ gilt:

$$\mathrm{Id}(a + v) = a + v = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}(a) + \mathrm{Id}_V(v)$$

wobei Id_V die Identität auf V sei und eben genau ein Isomorphismus ist, das heißt also $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}} \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$.

- **(Rechts)Inverses:** Jede Affinität $F \in \mathscr{F}(\mathscr{A}, V)$ ist definitionsgemäß bijektiv, besitzt also ein Inverses: F^{-1}, für das gilt

$$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$$

Dieses Inverse ist auch eine Affinität, denn für $a_0' := F(a_0),\ a_0 \in \mathscr{A}$ ist

$$F(a_0 + f^{-1}(v)) = F(a_0) + f\left(f^{-1}(v)\right) = a_0' + v\ \to\ F^{-1}(a_0' + v) = a_0 + f^{-1}(v)\ \ \forall\ v \in V$$

und f^{-1} ist bekanntlich auch ein Isomorphismus.

Somit ist $(\mathscr{F}(\mathscr{A}, V), \circ)$ auch eine Gruppe. $\square$

d) **Nennen:** Für $a, b \in \mathscr{A} : \overline{ab} := \overrightarrow{ab}$.
Es ist klar dass $\mathrm{Aut}_V = \mathrm{GL}(V)$ ist (da jeder Isomorphismus auch ein Automorphismus ist und definitionsgemäß auch umgekehrt). Suchen einen bijektiven Homomorphismus

$$\Phi : (V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V), \circ) \to (\mathscr{F}(\mathscr{A}, V), \circ)$$

für ein geeignet gewähltes $\varphi : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(V)$. Machen den Ansatz $\varphi = \mathrm{Id}_V$, das heißt für $f \in \mathrm{GL}(V)$ ist $\varphi_f = f$. Da $\mathscr{A} \neq \emptyset$ existiert ein $a_0 \in \mathscr{A}$. Dies sei ab nun fest.

Machen den Ansatz: Für $v \in V,\ f \in \mathrm{GL}(V)$ sei

$$V \rtimes_{\mathrm{Id}_V} \mathrm{GL}(V) \ni (v,f) \overset{\Phi}{\mapsto} \Phi((v,f)) \in \mathscr{F}(\mathscr{A},V) \ :\ \Phi(v,f)(a) = (a_0+v) + f\left(\overline{a_0 a}\right) \text{ für } a \in \mathscr{A}$$

Es gilt: Φ ist ein Isomorphismus, mit dem Inversen

$$\Phi^{-1}(F) := \left(\overline{a_0 F(a_0)}, f\right) \quad \text{für } F \in \mathscr{F}(\mathscr{A},V) \text{ mit } F(a_0+v) = F(a_0) + f(v)$$

- **Wohldefiniertheit:** $\Phi(v,f)$ ist tatsächlich eine Affinität, da

$$\Phi(v,f)(a_0+w) = (a_0+v) + f\left(\overline{a_0(a_0+w)}\right) = (a_0+v) + f(\underbrace{\vec{0}}_{\overline{a_0a_0}}) + f(w) = \Phi(v,f)(a_0) + f(w)$$

  Somit ist Φ wohldefiniert.
- **Homomorphismus:** Für $(v,f),\ (w,g) \in V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)\ ,\ a \in \mathscr{A}$ ist:

$$\Phi\left[(v,f)\circ(w,g)\right](a) = \Phi\left((v+\varphi_f(w), f\circ g)\right)(a) = \Phi((v+f(w), f\circ g))(a) = (a_0+v+f(w)) + (f\circ g)(\overline{a_0 a})$$

$$= (a_0+v) + f(w) + f(g(\overline{a_0a})) \overset{f \text{ linear}}{=} (a_0+v) + f(w+g(\overline{a_0a})) = (a_0+v) + f\left(\overline{a_0(a_0+w+g(\overline{a_0a}))}\right)$$

$$= (a_0+v) + f\left(\overline{a_0\Phi(w,g)(a)}\right) = \Phi(v,f)\left(\Phi(w,g)(a)\right) = \left[\Phi(v,f)\circ\Phi(w,g)\right](a)$$

- **Injektiv:** Sei $(v,f) \in V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)$ so dass $\Phi((v,f)) = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$, das heißt $\forall\ a \in \mathscr{A}$ ist

$$\Phi(v,f)(a) = (a_0+v) + f\left(\overline{a_0a}\right) = a$$

  Dann ist $v + f(\overline{a_0a}) = \overline{a_0a}$. Setzen $a = a_0$, das heißt

$$\overline{a_0a} = \overline{a_0a_0} = \vec{0} \ \to\ f(\overline{a_0a}) = \vec{0} \ \to\ v + \vec{0} = \vec{0} \ \to\ v = \vec{0}$$

  also $f(\overline{a_0a}) = \overline{a_0a}\ \forall\ a$. Für beliebigen Vektor $v \in V$ also

$$f(\overline{a_0(a_0+v)}) = f(v) = \overline{a_0(a_0+v)} = v \ \to\ f = \mathrm{Id}_V \ \to\ (v,f) = (\vec{0}, \mathrm{Id}_V) = 0_{V\rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)}$$

  wobei nach Teil (b) eben $(\vec{0}, \mathrm{Id}_v) = 0_{V\rtimes_\varphi\mathrm{GL}(V)}$ genau das neutrale Element in $V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)$ ist. Somit ist

$$\operatorname{kernel}\Phi = \left\{0_{V\rtimes_\varphi\mathrm{GL}(V)}\right\}$$

  also Φ injektiv.
- Für bestimmtes $F \in \mathscr{F}(\mathscr{A},V)$ ist der Isomorphismus $f \in \mathrm{GL}(V)$ für den gilt

$$F(a_0+v) = F(a_0) + f$$

  eindeutig bestimmt, denn: Seien f_1, f_2 zwei diese Eigenschaft erfüllende Endomorphismen. Dann ist für beliebiges $v \in V$:

$$F(a_0+v) = F(a_0) + f_1(v) = F(a_0) + f_2(v)$$

  Wegen der Eindeutigkeit von $\overline{F(a_0)F(a_0+v)}$ ist $f_1(v) = f_2(v)$.
- **Surjektiv:** Sei nun $F \in \mathscr{F}(\mathscr{A},V)$ beliebig mit $F(a) = F(a_0) + f(\overline{a_0a})$ für ein (eindeutig bestimmtes) $f \in \mathrm{GL}(V)$. Dann gilt für $\left(\overline{a_0F(a_0)}, f\right) \in V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)$:

$$\Phi\left(\left(\overline{a_0F(a_0)}, f\right)\right) = F$$

  denn für beliebiges $a \in \mathscr{A}$ ist

$$\Phi\left(\left(\overline{a_0F(a_0)}, f\right)\right)(a) \overset{\text{def. von }\Phi}{=} \underbrace{a_0 + \overline{a_0F(a_0)}}_{F(a_0)} + f\left(\overline{a_0a}\right) = F(a)$$

  Somit ist $\operatorname{image}\Phi = \mathscr{F}(\mathscr{A},V)$ und deshalb bijektiv.

Somit ist Φ ein (kanonischer) Isomorphismus zwischen $V \rtimes_{\mathrm{Id}_V} \mathrm{GL}(V)$ und $\mathscr{F}(\mathscr{A},V)$. $\square$

Aufgabe 04

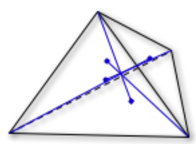
Betrachten den affinen Raum $\mathbb{R}^3$ mit der üblichen Vektoraddition.
Annahme: Das Volumen V des Tetraeders sei nicht Null.
Bezeichnen:

- $B_0 := A, B_1 := B, B_2 := C, B_3 := D.$
- $S_0 := S_A, S_1 : S_B, S_2 := S_C, S_3 := S_D$
- $s_i := \overline{AS_i},\ i = 0,..,3$
- Für beliebige Punkte $A, B \in \mathbb{R}^3$ bezeichnen $AB := \left|\overline{AB}\right|$ als die Länge deren Verbindungsstrecke.
- Für Dreieck ABC sei $\mathcal{A}(ABC)$ seine Fläche.
- Für Tetraeder $ABCD$ sei $\mathcal{V}(ABCD)$ sein Volumen.
- Für gleichschenkliges Dreieck ABC, $AB = AC$, bezeichne A den *Gipfelpunkt* bzw. $\widehat{BAC}$ den *Gipfelwinkel.*
- Für ein Dreieck ABC sei mit *Mittelpunkt* der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden gemeint.

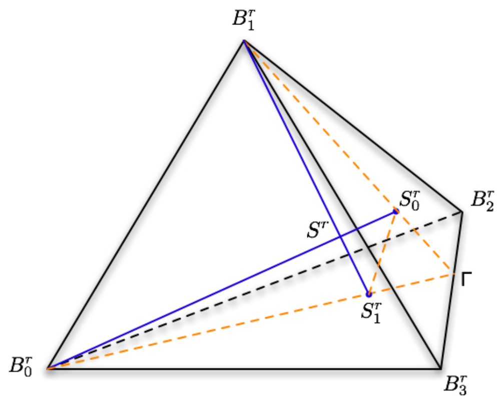
und legen los:

- Seien $b_i \in \mathbb{R}^3,\ i = 1, 2, 3$ jeweils so dass
$$B_i = B_0 + b_i$$
ist. Die Vektoren $\{b_i\}$ sind linear unabhängig, da bekanntlich:
$$0 \neq V = \frac{1}{6}(b_1 \times b_2) \cdot b_3 = \frac{1}{6}\det\begin{pmatrix} - & b_1 & - \\ - & b_2 & - \\ - & b_3 & - \end{pmatrix}$$
Seien außerdem $b_i^r,\ i = 1, 2, 3$ so dass
$$B_0^r := 0,\ B_1^r := 0 + b_1^r, B_2^r := 0 + b_2^r, B_3^r := 0 + b_3^r$$
die Ecken eines regelmäßigen Tetraeders $\mathscr{T}$ bilden. O.B.d.A sei $|b_i^r| = 1$. Dann sind diese nach der gleichen Logik wie vorhin ebenfalls linear unabhängig. Somit existiert eine affine Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so dass
$$F(B_i) = B_i^r \ \leftrightarrow\ F(A + b_i) = 0 + b_i^r\ ,\ i = 1, 2, 3$$
ist, denn nach dem Satz über lineare Fortsetzung existiert immer ein (sogar eindeutig bestimmter, da $\{b_i\}_{i=1,2,3}$ Basis in $\mathbb{R}^3$) Endomorphismus $f \in \mathrm{End}\left(\mathbb{R}^3\right)$ mit $f(b_i) = b_i^r,\ i = 1, 2, 3$, also ist
$$F(A + v) := 0 + f(v)$$
genau die gewünschte Affinität.
Bemerke: Es ist somit $F(B_0) = F(A) = f(\vec{0}) = 0 = B_0^r$. Da die $\{b_i^r\}_{i=1,2,3} \subset \operatorname{image} f$ eine Basis in $\mathbb{R}^3$ bilden, ist f surjektiv und somit nach der Dimensionsformel
$$\dim \operatorname{kernel} f + \dim \operatorname{image} f = \dim \mathbb{R}^3 = 3$$
auch injektiv, also bijektiv. Also ist F sogar eine Affinität.

- Betrachten nun das (normierte) regelmäßige Tetraeder $\mathscr{T}$. Seien $S_i^r,\ i = 0,..,3$ die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden der jeweils von B_i^r gegenüberliegenden Fläche $\mathscr{B}_i^r$ und $s_i^r := \overline{B_i^r S_i^r}$. Aufgrund von Symmetriegründen ist klar dass sich alle $s_i^r,\ i = 0,..,3$ am gleichen Punkt S^r schneiden.



Aus Symmetriegründen folgt außerdem dass S^r jede dieser Strecken im selben selben Verhältnis teilt. Betrachten nun die beiden Strecken s_0^r, s_1^r und deren Schnittpunkt S:



Aus dem Bild ist abzulesen:

(i) Aus Symmetriegründen ist $B_0^r S^r = B_1^r S^r$ und $SS_0^r = S^r S_1^r$. Somit sind die Dreiecke $B_0^r S^r B_1^r$ und $S_0^r S^r S_1^r$ gleichschenklig, also

$$\widehat{B_0^r B_1^r S^r} = \widehat{B_1^r B_0^r S^r} \ \wedge \ \widehat{S_0^r S_1^r S^r} = \widehat{S_1^r S_0^r S^r}$$

Da deren Gipfelwinkel gleich ist, sind die beiden Dreiecke ähnlich, das heißt es gilt

$$\frac{S^r S_0^r}{B_0^r S^r} = \frac{S_0^r S_1^r}{B_0^r B_1^r}$$

(ii) Aus Symmetriegründen ist

$$\widehat{\Gamma S_0^r S_1^r} = \widehat{\Gamma S_1^r S_0^r} \ \wedge \ \widehat{\Gamma B_0^r B_1^r} = \widehat{\Gamma B_1^r B_0^r}$$

das heißt die Dreiecke $S_0^r \Gamma S_1^r$, $B_0^r \Gamma B_1^r$ sind gleichschenklig. Da sie außerdem einen gemeinsamen Gipfelwinkel haben sind sie somit ähnlich, das heißt es gilt

$$\frac{S_0^r S_1^r}{B_0^r B_1^r} = \frac{\Gamma S_0^r}{\Gamma B_1^r}$$

(iii) Aus der Vorlesung ist bekannt: Da S_0^r Schnittpunkt der Seitenhalbierenden des Dreiecks $B_1^r B_2^r B_3^r$ ist, und $\overline{B_1^r \Gamma}$ genau solch eine Seitenhalbierende ist, gilt:

$$\frac{\Gamma S_0^r}{\Gamma B_1^r} = \frac{1}{3}$$

Zusammengefasst hat man also:

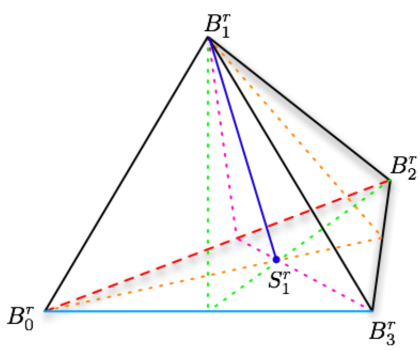
$$\frac{S^r S_0^r}{B_0^r S^r} = \frac{S_0^r S_1^r}{B_0^r B_1^r} = \frac{\Gamma S_0^r}{\Gamma B_1^r} = \frac{1}{3}$$

das heißt S^r schneidet diese Strecken s_i^r im Verhältnis $3:1$.

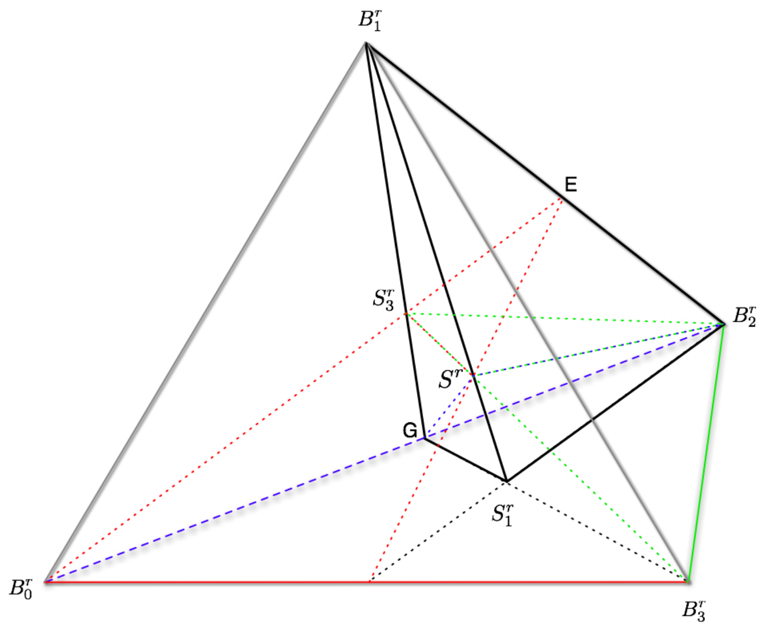
- Betrachten die 6 Strecken $\overline{B_i^r B_j^r}$, $i < j$ und die durch diese zusammen mit S^r erzeugten Ebenen. Die durch

$$\overline{B_0^r B_1^r},\ \overline{B_1^r B_2^r},\ \overline{B_1^r B_3^r}$$

definierten Ebenen teilen das Tetraeder in 6, wegen Symmetriegründen ähnliche, Tetraeder auf:



wobei diese die gemeinsame Kante $\overline{B_1^r S_1^r}$ und somit das gleiche Volumen haben. Betrachten also nur eines dieser Tetraeder:



wobei die gestrichelten Strecken eben die Schnitte der Seitenflächen mit den restlichen Ebenen darstellen. Jedes der $\frac{1}{6}$-Tetraeder wird also in weitere 4 Teile geteilt, so dass das regelmäßige Tetraeder $\mathscr{T}$ in insgesamt 24 Volumina aufgeteilt wird.

Zu zeigen: Die 4 Teilvolumina

$$\mathcal{V}(GS_1^r B_2^r S^r) = \mathcal{V}(GS_3^r B_2^r S^r) = \mathcal{V}(ES_3^r B_2^r S^r) = \mathcal{V}(ES_3^r B_1^r S^r)$$

sind gleich. Aus Symmetriegründen gilt $S^r S_i^r = S^r S_j^r \ \wedge \ B_i^r S^r = B_j^r S^r \ \forall \ i, j$. Insbesondere ist somit

$$S^r S_3^r = S^r S_1^r \ \wedge \ S^r B_1^r = S^r B_2^r$$

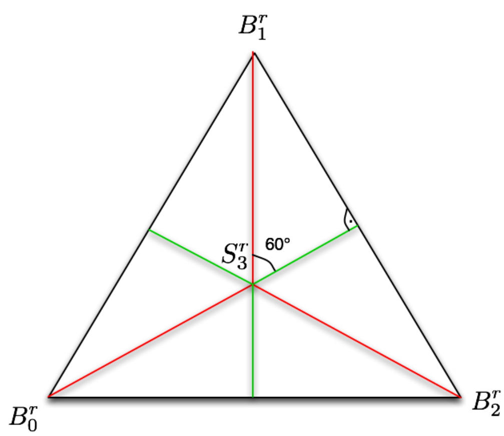
Da alle Seitenflächen von $\mathscr{T}$ gleiche gleichseitige Dreiecke sind, ist auch

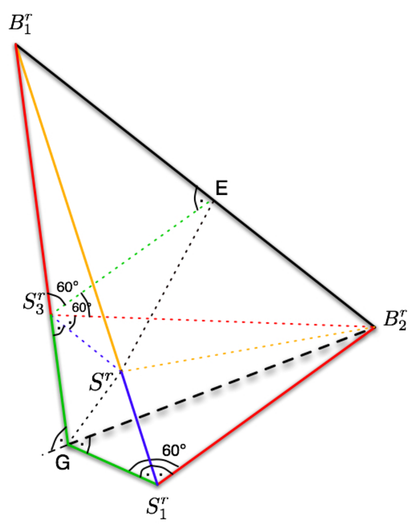
$$B_1^r S_3^r = B_2^r S_1^r = B_2^r S_3^r = S_3^r E$$

Da die $B_i^r S_i^r$ wegen Symmetriegründen senkrecht auf die entsprechenden Seitenflächen des Tetraeders $\mathscr{T}$ stehen, sind insbesondere:

$$\overline{S^r S_3^r} \perp B_0^r B_1^r B_2^r \ \wedge \ \overline{S^r S_1^r} \perp B_0^r B_2^r B_3^r$$

und ferner auch $\overline{S_3^r E} \perp \overline{B_1^r B_2^r}$. Obere Zusammenhänge sind nochmals in folgender Abbildung illustriert: gleiche Farbe bedeutet gleiche Länge.





Es ist also abzulesen

$$GS_1^r B_2^r S^r \cong GS_3^r B_2^r S^r \cong ES_3^r B_2^r S^r \cong ES_3^r B_1^r S^r$$

da alle inneren Winkel & Längen gleich sind. Somit haben die $\frac{1}{24}$-Tetraeder tatsächlich paarweise gleiches Volumen.

- Aus der Vorlesung ist bekannt: Geraden, Streckenverhältnisse und Volumenverhältnisse sind affine Eigenschaften. Ferner ist bekannt: Da $\mathscr{F}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ eine Gruppe ist (vgl. Aufgabe 03), ist auch F^{-1} eine Affinität, die das gleichmäßige Rechteck, bijektiv auf das ursprüngliche Abbildet. Somit werden alle s_i^r bijektiv auf die s_i abgebildet. S^r ist somit genau dann ein Schnittpunkt der s_i^r wenn auch $F^{-1}(S^r)$ ein Schnittpunkt der $s_i = F^{-1}(s_i^r) = \{v \in \mathbb{R}^3 \mid F(v) \in s_i^r\}$ ist, denn:

$$S^r \in \bigcap_{i=0}^{3} \underbrace{s_i^r}_{F(s_i)} \;\Rightarrow\; \forall\, i : S^r \in F(s_i) \;\Rightarrow\; F^{-1}(S^r) \in s_i$$

das heißt $F^{-1}(S^r)$ ist gemeinsamer Schnittpunkt der s_i: $S := F^{-1}(S^r)$. Analog gilt auch $S_i^r = F(S_i)$.

Da insbesondere auch Teilverhältnisse kollinearer Punkte affine Eigenschaften sind, ist auch das Teilverhältnis der (B_i, S, S_i) gleich dem der (B_i^r, S^r, S_i^r). Somit teilt S diese Strecken alle im Verhältnis $3:1$. Ferner sind Volumenverhältnisse auch affine Eigenschaften, und jedes Teilvolumen von $\mathscr{T}$ wird auf das entsprechende Teilvolumen im ursprünglichen Tetraeder bijektiv abgebildet. Somit sind auch dort die Verhältnisse der Teilvolumina genau $1:1$.