6. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie Lemma 5 aus der Vorlesung: Für Punkte A, B, C in einem affinen Raum gelten folgende Eigenschaften:

$$A + \overrightarrow{0} = A \qquad \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0} \qquad \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}\,.$$

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Bestimmen Sie diejenige affine Abbildung der Ebene, die die Punkte $(0,1)$, $(1,1)$ und $(1,0)$ in dieser Reihenfolge in die Punkte $(-1,1)$, $(0,2)$ bzw. $(-1,0)$ überführt.

Aufgabe 3 *(2+2+2 Punkte)*

(a) Zeigen Sie, dass die Automorphismen einer Gruppe N eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen bilden. Dies ist die sogenannte Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(N)$ von N.

(b) Gegeben seien zwei Gruppen N und H sowie ein Gruppenhomomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : \quad H &\to \mathrm{Aut}(N) \\ h &\mapsto \varphi_h\,. \end{aligned}$$

Überprüfen Sie, dass die Menge $N \times H$ mit der Verknüpfung

$$(n_1, h_1) \circ (n_2, h_2) := \big(n_1 \circ \varphi_{h_1}(n_2), h_1 \circ h_2\big)$$

zu einer Gruppe wird. Diese bezeichnet man als das semidirekte Produkt $N \rtimes_\varphi H$ von N und H bezüglich φ.

(c) Zeigen Sie, dass die Affinitäten eines affinen Raumes über einem Vektorraum V eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen bilden, welche isomorph zu $V \rtimes_\varphi \mathrm{GL}(V)$ bezüglich eines geeignet gewählten φ ist.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

In einem Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C und D seien S_A, S_B, S_C und S_D die Schnittpunkte der Seitenhalbierenden der jeweils gegenüberliegenden Seitenfläche. Zeigen Sie, dass die Strecken $\overline{AS_A}$, $\overline{BS_B}$, $\overline{CS_C}$ und $\overline{DS_D}$ sich alle in einem Punkt S schneiden und dass S jede dieser Strecken im selben Verhältnis teilt. Berechnen Sie dieses Verhältnis.

Gemeinsam mit dem Punkt S bestimmen die Endpunkte einer jeden Seite eine Ebene. Zeigen Sie, dass diese sechs Ebenen den Tetraeder in volumengleiche Teile zerlegen. Wieviele Teile sind das?

Abgabe: Montag, 26. Mai *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter http://caj.informatik.uni-jena.de.