Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 05 - Lösungen

Stilianos Louca

22. Mai 2008

Notationen

- Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention. Dabei soll Kovarianz und Kontravarianz keine Rolle spielen.
- Zu Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ bzw. Endomorphismus $A : V \to V$ und Eigenwert λ seien $E_\lambda(A)$ und $\mathscr{E}_\lambda(A)$ jeweils der Eigenraum und der verallgemeinerte Eigenraum von A.

Aufgabe 01

a) Beginnen mit der Substitution $x_1 := x,\ x_2 := \dot{x}$ und schreiben

$$\dot{x}_1 = x_2\ ,\ \dot{x}_2 = -2\beta\dot{x} - \omega^2 x = -2\beta x_2 - \omega^2 x_1$$

$$\dot{v} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2\beta \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

b) Machen den Ansatz $v(t) = v_0 e^{tA},\ v_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix}$. Aus der Vorlesung ist bekannt: $t \mapsto e^{tA}$ ist eine $\mathcal{C}^\infty$-Abbildung, mit

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$$

also

$$\dot{v} = Ae^{tA}v_0 = Av$$

das heißt $v = e^{tA}$ ist Lösung des DGL Systems.

c) Das charakteristische Polynom p_A von A ist gegeben durch

$$p_A(X) = X^2 + 2\beta X + \omega^2$$

woraus sich die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \Omega\ ,\ \Omega := \sqrt{\beta^2 - \omega^2}$$

ergeben. Bemerke dass für $\omega \le \beta$ immer $\beta > \Omega \ge 0$ also $\lambda_{1,2} \ne 0$ ist. Für $\omega > \beta$ ist dann sowieso $\Omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ also $\lambda_{1,2} \ne 0$.

Fall: $\beta \ne \omega$. Dann sind $\lambda_1 \ne \lambda_2$ und A ist auf jeden Fall diagonalisierbar. Entsprechende Eigenvektoren wären dann

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta + \Omega \end{pmatrix}\ ,\ v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta - \Omega \end{pmatrix}$$

so dass A bzgl. der Basis v_1, v_2 die Form

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\ ,\ T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}\ ,\ T^{-1} = \frac{1}{2\Omega}\begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

annimmt. Somit ist

$$e^{tA} = TT^{-1}e^{tA}TT^{-1} = Te^{T^{-1}tAT}T^{-1} = T\exp\begin{pmatrix} t\lambda_1 & 0 \\ 0 & t\lambda_2 \end{pmatrix} T^{-1} = T\begin{pmatrix} \exp(t\lambda_1) & 0 \\ 0 & \exp(t\lambda_2) \end{pmatrix} T^{-1}$$

$$= \frac{1}{2\Omega}\begin{pmatrix} \lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2} & e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1} \\ \lambda_1\lambda_2\left(e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}\right) & \lambda_2 e^{t\lambda_2} - \lambda_1 e^{t\lambda_1} \end{pmatrix}$$

Entsprechend obigem Ergebnis, ist also die allgemeine Lösung von x gegeben durch

$$x(t) = \frac{x_0}{2\Omega}\left[\lambda_2 e^{t\lambda_1} - \lambda_1 e^{t\lambda_2}\right] + \frac{\dot{x}_0}{2\Omega}\left[e^{t\lambda_2} - e^{t\lambda_1}\right] \cong Ae^{t\lambda_1} + Be^{t\lambda_2} = e^{-\beta t}\left[Ae^{\Omega t} + Be^{-\Omega t}\right] \ , \ A, B \in \mathbb{C}$$

Die Anfangsbedingungen $x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 1$ ergeben

$$x(0) = A + B \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{x}(0) = e^{-\beta t}\left[-\beta Ae^{\Omega t} - \beta Be^{-\Omega t} + A\Omega e^{\Omega t} - B\Omega e^{-\Omega t}\right]|_0 = -\beta(A+B) + \Omega(A-B) \stackrel{!}{=} 1$$

$$\rightarrow \ A = \frac{1}{2\Omega} = -B$$

also

$$\boxed{x(t) = \frac{e^{-\beta t}}{2\Omega}\left[e^{\Omega t} - e^{-\Omega t}\right] = \begin{cases} \dfrac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}\sin\left(\sqrt{\omega^2-\beta^2}\cdot t\right) & : \omega > \beta \\ \dfrac{e^{-\beta t}}{\sqrt{\beta^2 - \omega^2}}\sinh\left(\sqrt{\beta^2-\omega^2}\cdot t\right) & : \omega < \beta \end{cases}}$$

Fall: $\beta = \omega > 0$. Dann sind $\lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$ und der einzige Eigenvektor von A ergibt sich als

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -\beta \end{pmatrix}$$

Versuchen A auf Jordan-Form zu bringen, und finden dabei dass für $v_2 := \frac{1}{\beta}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt:

$$Av_2 = -\beta v_2 + v_1$$

Somit nimmt A bzgl. der Basis v_1, v_2 die Form

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -\beta & 1 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix} \ , \ T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\beta} \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\beta} \\ \beta & 1 \end{pmatrix}$$

an, für die gilt:

$$\left(t\tilde{A}\right)^n = \begin{pmatrix} (-\beta t)^n & n(-\beta)^{n-1}t^n \\ 0 & (-\beta t)^n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot n(-\beta)^{n-1}t^n = t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}(-\beta)^{n-1}t^{n-1} = t\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(-\beta t)^n = t\exp(-\beta t)$$

$$\Rightarrow \ \exp(t\tilde{A}) = \begin{pmatrix} \exp(-\beta t) & t\exp(-\beta t) \\ 0 & \exp(-\beta t) \end{pmatrix}$$

analog zu vorhin impliziert:

$$e^{tA} = Te^{T^{-1}tAT}T^{-1} = T\exp\begin{pmatrix} -\beta t & t \\ 0 & -\beta t \end{pmatrix}T^{-1} = T\begin{pmatrix} e^{-\beta t} & te^{-\beta t} \\ 0 & e^{-\beta t} \end{pmatrix}T^{-1} = e^{-\beta t}\begin{pmatrix} 1+\beta t & t \\ -\beta^2 t & 1-\beta t \end{pmatrix}$$

Somit ist die allgemeine Lösung von $x(t)$ gegeben durch

$$x(t) = e^{-\beta t}\left[(1+\beta t)x_0 + t\dot{x}_0\right] \cong e^{-\beta t}\left[A + Bt\right] \ , \ A, B \in \mathbb{C}$$

(vgl. aperiodischer Grenzfall).
Durch die Anfangsbedingungen ergibt sich

$$x(0) = A \stackrel{!}{=} 0$$

$$\dot{x}(0) = e^{-\beta t}\left[-\beta A - \beta Bt + B\right]|_0 = -\beta A + B \stackrel{!}{=} 1$$

$$\rightarrow \ A = 0, \ B = 1$$

also

$$\boxed{x(t) = te^{-\beta t}}$$

Aufgabe 02

Bemerkung: Betrachten nur den Fall $n > 1$, denn für $n = 1$ ist J^k immer in Jordan-Normalform.
Sei nun $J = J_n(\lambda) \in M_n(\lambda)$ ein $n \times n$ Jordan-Block zum Eigenwert λ.

Fall: λ=**0**

Definieren:

$$0 \leq m < n : \mathcal{J}_n^m := \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m = n : \mathcal{J}_n^n := I_n$$

$$m < 0 : \mathcal{J}_n^m := 0$$

und sehen dass $\mathcal{J}_n^{n-1} = J_n(0)$ ist. Bekanntlich ist dann

$$J^k = (J_n(0))^k = \left(\mathcal{J}_n^{n-1}\right)^k = \mathcal{J}_n^{n-k}$$

(vgl. Übungsserie 03). Im Fall $k \geq n$ ist also $J^k = 0$, weshalb die Jordan-Form einfach gegeben ist durch die Nullmatrix. Betrachten also den Fall $k < n$.

Bemerke: Die Hauptdiagonale von $J^k, \ k \geq 1$ besteht somit aus lauter Nullen, so dass sich das charakteristische Polynom von J^k ergibt als $p_{J^k} = X^n$. Somit ist $\lambda = 0$ der einzige Eigenwert von J^k (mit algebraischer Vielfachheit n) und $E_0(J^k) = \text{kernel}\, J^k$. Nach näherem hingucken, erkennt man dass $\text{rang}\, J^k = n - k$ (Anzahl der linear unabhängigen Spalten) ist. Somit besteht die Jordan-Form J_k von J^k aus

$$\dim E_0(J^k) = \dim \text{kernel}\, J^k = n - \text{rang}\, J^k = k$$

Jordan-Kästchen.

Für die kanonische Basis $\{e_i\}$ von $\mathbb{C}^n$ gilt:

$$Je_i = \begin{cases} 0 & : i = 1 \\ e_{i-1} & : i \geq 2 \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad J^k e_i = \begin{cases} 0 & : i \leq k \\ e_{i-k} & : i > k \end{cases}$$

Sei $r := n \bmod k$ und $d := (n - r)/k$. Definieren eine neue Basis $v_1, .., v_n$ gemäß:

- Setzen $v_1 := e_1$
- Setzen $v_i,\ i \leq n$ wir folgt: Sei $v_{i-1} = e_{lk+j},\ l \in \mathbb{N}_0,\ j = 1,..,k$ (Bemerke: l, j eindeutig). Dann setzen:

$$v_i := \begin{cases} e_{(l+1)k+j} & : lk + j + k \leq n \\ \\ e_{0k+(j+1)} & : \text{sonst} \end{cases}$$

  Bemerke:

  - Die Zuordnung kann immer stattfinden, denn um $j + 1 > n$ zu erreichen, müsste $k + 1 \geq j + 1 > n$ also $k \geq n$ sein.
  - Diese Zuordnung ist eindeutig, da l und j für die Darstellung der Zahl $lk + j$ eindeutig sind.
  - Diese Zuordnung ist eineindeutig, denn j wächst monoton mit i, und im Falle das es konstant bleibt, wächst immer l, das heißt es wird nie 2 mal das gleiche e_{kl+j} zugeordnet.
  - Mit anderen Worten wurde zugeordnet: $v_1 := e_1,\ v_2 := e_{k+1},\ v_3 := e_{2k+1}, ...$ usw.
  - Für diese (Basis)Vektoren gilt nun: Für $v_i = e_j$ ist $Jv_i = 0$ und für $v_i = e_{lk+j},\ l \geq 1$ ist $Jv_i = e_{(l-1)k+j} = v_{i-1}$.
  - Für $j \leq r$ gibt es noch ein $v_i = e_{dk+j}$. Für $j > r$ *geht dann* l *nur noch bis* $d - 1$.

  Somit gibt es genau r Jordan-Kästchen der Größe $d + 1$, und $k - r$ Kästchen der Größe d.

Also ist die Jordan-Normalform von J^k gegeben durch

$$\left((J_n(0))^k\right)_J = \text{diag}(\underbrace{J_d(0), .., J_d(0)}_{k-r \text{ mal}}, \underbrace{J_{d+1}(0), ..., J_{d+1}(0)}_{r \text{ mal}})$$

Variante: Sei C_l die Anzahl der Jordan-Kästchen mit dim $\geq m$. Dann gilt für J^k und $l \in \mathbb{N}_0$:

$$\dim\text{kernel}\left(J^k\right)^{l+1} - \dim\text{kernel}\left(J^k\right)^l = C_{l+1}$$

Es ist bekannt (bzw. zeigt sich durch direktes Ausrechnen) dass $\left(J^k\right)^l$ nur aus 1-en in der $k \cdot l$-ten (oberen) Nebendiagonale besteht, woraus man ablesen kann:

$$\text{rang}\left(J^k\right)^l = n - k \cdot l \ \rightarrow\ \dim\text{kernel}\left(J^k\right)^l = k \cdot l\ ,\ 1 \leq l \leq d$$

und

$$\dim\text{kernel}(J^k)^{d+1} = n\ ,\ \dim\text{kernel}(J^k)^{d+2} = n$$

Somit ist:

$$C_l = k \cdot l - k \cdot (l - 1) = k \quad , \quad 1 \leq l \leq d\ ,\ C_{d+1} = n - kd = r\ ,\ C_{d+2} = 0$$

das heißt insbesondere für $l = d$ ist $C_{d-1} = C_d = k$. Es gibt also k Jordan-Kästchen mit dim $\geq d$ und sogar keine anderen. Außerdem sind nur r davon mit dim $\geq d + 1$ und keine mit dim $\geq d + 2$, also ist

$$\boxed{\left((J_n(0))^k\right)_J = \text{diag}(\underbrace{J_d(0), .., J_d(0)}_{k-r \text{ mal}}, \underbrace{J_{d+1}(0), ..., J_{d+1}(0)}_{r \text{ mal}})}$$

Fall: $\lambda \neq 0$

- **Vorbetrachtung:** Sei $\mathcal{M}_n^k$ der Raum aller $n \times n$ Matrizen mit $A_{ij} = 0$ für $j < i + k$. Dann ergibt sich für beliebige Matrizen $A \in \mathcal{M}_n^k,\ B \in \mathcal{M}_n^1,\ k > 0$:

$$j < i + k + 1 : (BA)_{ij} = \underbrace{\underbrace{B_{il}}_{0 \text{ für } l<i+1} \cdot \underbrace{A_{lj}}_{0 \text{ für } j<l+k}}_{0 \text{ für } j<i+k+1} = 0$$

$$j = i + k + 1 : (BA)_{ij} = \underbrace{\underbrace{B_{il}}_{0 \text{ für } l<i+1} \cdot \underbrace{A_{lj}}_{0 \text{ für } l>j-k=i+1}}_{0 \text{ für } l\neq i+1} = B_{i,i+1}A_{i+1,j} = B_{i,i+1}A_{j-k,j}$$

also $(BA) \in \mathcal{M}_n^{k+1}$. Ferner also $B^m A \in \mathcal{M}_n^{k+m}$
Insbesondere folgt: Besteht die 1. (obere) Nebendiagonale von B aus nur einem Wert b_1 (d.h $B_{i,i+1} = b_1 \ \forall\ i < n$ und die k. (obere) Nebendiagonale von A aus nur ebenfalls nur einem Wert a_k (d.h $A_{j,j+k} = a_k \ \forall\ j \leq n-k$) so ergibt sich

$$(BA)_{i,i+k+1} = \underbrace{B_{i,i+1}}_{b_1} \cdot \underbrace{A_{i+1,i+k+1}}_{a_k} = b_1 a_k \ \forall\ i \leq n-(k+1)$$

das heißt die $(k+1)$-te (obere) Nebendiagonale von $BA \in \mathcal{M}_n^{k+1}$ besteht aus nur einem Wert $b_1 a_k$. Ferner besteht dann die $(k+m)$-te obere Nebendiagonale von $B^m A \in \mathcal{M}_n^{k+m}$ nur aus dem Wert $b_1^m a_k$.

- **Spezialfall:** Aus Übungsserie (03) wissen wir: J^k hat die Gestalt

$$J^k = \begin{pmatrix} \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots \\ & \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \cdots \\ & & \binom{k}{0}\lambda^k & \cdots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & k(k-1)\lambda^{k-2} & \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots \\ & & \lambda^k & \ddots \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^0$$

woraus sofort das charakteristische Polynom p_{J^k} abzulesen ist:

$$p_{J^k}(X) = \left(X - \lambda^k\right)^n$$

Bemerke: Das Minimalpolynom μ_{J^k} ist dann auch gegeben durch $\mu_{J^k}(X) = \left(X - \lambda^k\right)^m$ für ein bestimmtes $m \leq n$. Außerdem ist λ^k der Einzige Eigenwert von J^k also $\mathscr{E}_{\lambda^k}(J^k)$ der einzige verallgemeinerte Eigenraum von J^k und demnach $\mathbb{C}^n = \mathscr{E}_{\lambda^k}(J^k)$. Somit ist $\mathscr{J} := J^k - \lambda^k$ Nilpotent auf $\mathbb{C}^n$ (da Nilpotent auf $\mathscr{E}_{\lambda^k}(J^k)$). Tatsächlich gilt $\mathscr{J} \in \mathcal{M}_n^1$. Somit folgt wegen obiger Überlegung:

$$\mathscr{J}^m = \mathscr{J}^{m-1}\mathscr{J} \in \mathcal{M}_n^{1+(m-1)} = \mathcal{M}_n^m$$

Für $m = n$ enthält $\mathcal{M}_n^m = \mathcal{M}_n^n$ jedoch nur die Nullmatrix, also ist $\mathscr{J}^n = 0$.

- Die 1. obere Nebendiagonale von $\mathscr{J}$ besteht aus nur einem Wert $k\lambda^{k-1}$. Für $m < n$ enthält somit die $(m-1)+1 = m$ -te obere Nebendiagonale von $\mathscr{J}^m$ genau den Wert

$$\left(k\lambda^k\right)^{m-1}\left(k\lambda^k\right) = \left(k\lambda^{k-1}\right)^m \neq 0$$

das heißt für $m < n$ ist $\mathscr{J}^m = \left(J^k - \lambda^k\right)^m$ auf keinen Fall die Nullmatrix. Somit ist

$$\mu_{J^k}(X) = \left(X - \lambda^k\right)^n$$

das Minimalpolynom von J^k und das größte Jordan-Kästchen von J^k zum (einzigen) Eigenwert λ^k hat genau die Größe n. Somit ist die Jordan-Form von J^k gegeben durch das $n \times n$ Jordan-Kästchen zum Eigenwert λ^k:

$$\boxed{\left((J_n(\lambda))^k\right)_J = J_n\left(\lambda^k\right)}$$

Variante: Es ist sofort abzulesen dass $\operatorname{rang} \mathscr{J} = n-1$ ist, das heißt $\dim \operatorname{kernel} \mathscr{J} = 1$. Somit gibt es nur ein einziges Jordan Kästchen zum (einzigen) Eigenwert λ^k.

Aufgabe 03

Sei $\Phi : (V^*)^{\mathbb{C}} \to (V^{\mathbb{C}})^*$ definiert durch:

$$(V^*)^{\mathbb{C}} \ni \psi = (\underbrace{\psi^1}_{\in V^*}, \underbrace{\psi^2}_{\in V^*}) \overset{\Phi}{\mapsto} \Phi(\psi) = \chi \in (V^{\mathbb{C}})^*$$

$$\varphi = (\underbrace{\varphi_1}_{\in V}, \underbrace{\varphi_2}_{\in V}) \in V^{\mathbb{C}} \ : \ \Phi(\psi)\varphi := \left(\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2\right) + i\left(\psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1\right) \in \mathbb{C}$$

Bemerkung: Durch direktes ausrechnen zeigt sich: $\Phi(\psi)$ ist tatsächlich $\mathbb{C}$-linear, das heißt $\Phi(\psi) \in (V^{\mathbb{C}})^*$.

Linearität

Die Zuweisung Φ ist linear, denn für $\psi = (\psi^1, \psi^2), \zeta = (\zeta^1, \zeta^2) \in (V^*)^{\mathbb{C}},\ \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \in \mathbb{C}, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in V^{\mathbb{C}}$ ist

$$\Phi(\psi + \zeta)\varphi = \Phi\left(\psi^1 + \zeta^1, \psi^2 + \zeta^2\right)\varphi = \left[\left(\psi^1 + \zeta^1\right)\varphi_1 - \left(\psi^2 + \zeta^2\right)\varphi_2\right] + i\left[\left(\psi^1 + \zeta^1\right)\varphi_2 + \left(\psi^2 + \zeta^2\right)\varphi_1\right]$$

$$= \psi^1\varphi_1 + \zeta^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 - \zeta^2\varphi_2 + i\psi^1\varphi_2 + i\zeta^1\varphi_2 + i\psi^2\varphi_1 + i\zeta^2\varphi_1$$

$$= \left(\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2\right) + i\left(\psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1\right) + \left(\zeta^1\varphi_1 - \zeta^2\varphi_2\right) + i\left(\zeta^1\varphi_2 + \zeta^2\varphi_1\right) = \Phi(\psi)\varphi + \Phi(\zeta)\varphi$$

$$\Phi(\lambda\psi)\varphi = \Phi(\lambda_1\psi^1 - \lambda_2\psi^2,\ \lambda_1\psi^2 + \lambda_2\psi^1)\varphi$$

$$= \left(\lambda_1\psi^1 - \lambda_2\psi^2\right)\varphi_1 - \left(\lambda_1\psi^2 + \lambda_2\psi^1\right)\varphi_2 + i\left(\lambda_1\psi^1 - \lambda_2\psi^2\right)\varphi_2 + i\left(\lambda_1\psi^2 + \lambda_2\psi^1\right)\varphi_1$$

$$= \lambda_1\left(\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2\right) - \lambda_2\left(\psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1\right) + i\lambda_1\left(\psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1\right) + i\lambda_2\left(\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2\right) = \lambda\Phi(\psi)\varphi$$

Injektivität

Sei $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in (V^*)^{\mathbb{C}}$ mit $\Phi(\psi) = 0$, das heißt $\forall\ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in V^{\mathbb{C}}$ ist $\Phi(\psi)\varphi = 0$. Für alle φ ist dann insbesondere

$$\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2 = 0 = \psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1$$

Setzen wir $\varphi_2 = 0$, so folgt $\psi^1\varphi_1 = 0\ \forall\ \varphi_1 \in V$ also ist $\psi^1 = 0$. Setzen wir $\varphi_1 = 0$, so folgt $\psi^2\varphi_2 = 0\ \forall\ \varphi_2 \in V$, also ist $\psi^2 = 0$. Somit ist $\psi = 0$, das heißt $\operatorname{kernel}\Phi = \{0\}$. Somit ist Φ injektiv.

Surjektivität

Bemerkung: Ist V endlich dimensional dann ist wegen $\dim(V^*)^{\mathbb{C}} = \dim V^* = \dim V = \dim V^{\mathbb{C}} = \dim(V^{\mathbb{C}})^* =: n$ und der Dimensionsformel

$$\underbrace{\dim\operatorname{kernel}\Phi}_{0} + \dim\operatorname{image}\Phi = \dim(V^*)^{\mathbb{C}} = n = \dim(V^{\mathbb{C}})^*$$

auch $\operatorname{image}\Phi = (V^{\mathbb{C}})^*$. Doch die Endlichkeit von V ist nicht gewährleistet!

Sei $\chi \in (V^{\mathbb{C}})^*$ beliebig. Suchen ein $\psi = (\psi^1, \psi^2) \in (V^*)^{\mathbb{C}}$ mit $\Phi(\psi) = \chi$. Setzen für beliebiges $\varphi_1 \in V$:

$$\psi^1\varphi_1 := \left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_1\ ,\ \psi^2\varphi_1 := \left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_2 \quad \text{mit} \quad \chi(\varphi_1, \varphi_2) =: \left(\chi(\varphi_1, \varphi_2)\right)_1 + i\left(\chi(\varphi_1, \varphi_2)\right)_2$$

so dass gilt:

$$\Phi(\psi)(\varphi_1, 0) = \psi^1\varphi_1 + i\psi^2\varphi_1 = \chi(\varphi_1, 0)$$

Da χ insbesondere in φ_1 linear ist, sind auch die ψ^1, ψ^2 linear und somit in V^*. Haben somit einen Kandidaten $\psi \in (V^*)^{\mathbb{C}}$ gefunden. Zu zeigen wäre dass die Gleichheit auch für beliebiges $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ gilt:

$$\Phi(\psi)\varphi = \left(\psi^1\varphi_1 - \psi^2\varphi_2\right) + i\left(\psi^1\varphi_2 + \psi^2\varphi_1\right) = \left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_1 \underbrace{-\left(\chi(\varphi_2, 0)\right)_2}_{\substack{+i(\chi(i(\varphi_2,0)))_2 \\ \text{da linear}}} + \underbrace{i\left(\chi(\varphi_2, 0)\right)_1}_{\substack{(\chi(i(\varphi_2,0)))_1 \\ \text{da linear}}} + i\left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_2$$

$$= \left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_1 + i\left(\chi(0, \varphi_2)\right)_2 + \left(\chi(0, \varphi_2)\right)_1 + i\left(\chi(\varphi_1, 0)\right)_2 \overset{\text{Linearität von } \chi}{=} \left(\chi(\varphi_1, \varphi_2)\right)_1 + i\left(\chi(\varphi_1, \varphi_2)\right)_2 = \chi\varphi$$

Somit ist Φ surjektiv und deshalb auch bijektiv. Da Φ unabhängig von irgendeiner Basis definiert wurde, stellt er einen kanonischen Endomorphismus dar. $\square$