5. Übungsserie zur Vorlesung
„Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(1+1+2 Punkte)*

Wir betrachten die lineare Differentialgleichung $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0$ eines gedämpften harmonischen Oszillators mit Dämpfungskonstante $\beta \geqslant 0$ und Kreisfrequenz $\omega > 0$.

(a) Transformieren Sie diese Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Substitutionen $x_1 := x$, $x_2 := \dot{x}$ in ein System zweier Differentialgleichungen erster Ordnung und schreiben Sie dieses in Matrixform $\dot{v} = Av$ für $v = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$.

(b) Zeigen Sie, daß $v(t) := \mathrm{e}^{tA}v(0)$ eine Lösung dieses Systems ist.

(c) Berechnen Sie $x(t)$ für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$. Betrachten Sie dabei den Fall $\beta = \omega$ gesondert.

Hinweis: Drücken Sie alle Zwischenergebnisse mit Hilfe der Eigenwerte statt mit β und ω aus.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Es sei J ein $n \times n$-Jordan-Block zum Eigenwert λ. Geben Sie eine Jordan-Normalform für J^k an.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\lambda \neq 0$ und $\lambda = 0$.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Beweisen Sie für einen reellen Vektorraum V, dass es einen kanonischen (d.h. basisunabhängigen) Vektorraumisomorphismus $(V^*)^{\mathbb{C}} \cong (V^{\mathbb{C}})^*$ gibt. Hierbei bezeichnet $V^{\mathbb{C}}$ die Komplexifizierung von V und V^* den Dualraum zu V (vgl. LAAG I, Vorlesung 17).

Abgabe: Montag, 19. Mai *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter http://caj.informatik.uni-jena.de.