Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 04 - Lösungen

Stilianos Louca

15. Juni 2008

Bemerkungen:

- Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention.
- Für eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ bezeichne p_A das charakteristische Polynom und μ_A das Minimalpolynom.
- Für Matrix $A \in M(n \times m, \mathbb{C})$ sei: $A^H := \overline{A^T}$
- Für beliebige Matrizen $A, B \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(AB)^H = \overline{(AB)^T} = \overline{B^T A^T} = \overline{B^T}\,\overline{A^T} = B^H A^H$$

$$(A+B)^H = \overline{(A+B)^T} = \overline{A^T + B^T} = \overline{A^T} + \overline{B^T} = A^H + B^H$$

Ist A invertierbar, so gilt:

$$\left(A^{-1}\right)^H = \overline{\left(A^{-1}\right)^T} = \overline{\left(A^T\right)^{-1}} = \overline{A^T}^{-1} = \left(A^H\right)^{-1}$$

denn für invertierbare U ist

$$\sum_k \overline{U_{ik}^{-1}} \cdot \overline{U_{kj}} = \sum_k \overline{U_{ik}^{-1} U_{kj}} = \overline{I_{ij}} = I_{ij} \;\Rightarrow\; \overline{U^{-1}} = \overline{U}^{-1}$$

- Für Blockdiagonale Matrix $A = \operatorname{diag}(A_1, .., A_m) \in M_n(\mathbb{C}),\ A_i \in M_{n_m}(\mathbb{C})$ ist:

$$A^H = \overline{\operatorname{diag}(A_1, .., A_m)^T} = \overline{\operatorname{diag}\left(A_1^T, .., A_m^T\right)} = \operatorname{diag}\left(\overline{A_1^T}, .., \overline{A_m^T}\right) = \operatorname{diag}\left(A_1^H, .., A_m^H\right)$$

- Kommutieren zwei Matrizen AB so kommutieren diese auch in einer anderen Basis, das heißt für invertierbare U und $\tilde{A} = U^{-1}AU,\ \tilde{B} = U^{-1}BU$ gilt:

$$AB = BA \;\Leftrightarrow\; \tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$$

Beweis: (nur eine Richtung nötig da Ähnlichkeit symmetrische Relation ist). Sei $AB = BA$. Dann ist:

$$\tilde{A}\tilde{B} = U^{-1}A\underbrace{UU^{-1}}_{I}BU = U^{-1}ABU = U^{-1}BAU = U^{-1}BUU^{-1}AU = \tilde{B}\tilde{A}$$

Aufgabe 01

a) Beweis durch induktion.

- Für $A \in M_1(\mathbb{C})$ ist A schon in diagonalform.
- Annahme: Jede Normalmatrix $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ ist diagonalisierbar.

- Zeigen: Jede Normalmatrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist diagonalisierbar. Sei F der durch A (bzgl. der kanonischen Basis $e_1, .., e_n$) induzierte Endomorphismus im Vektorraum V. Da $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist, hat das charakteristische Polynom p_F von F mindestens eine Nullstelle, das heißt F besitzt einen Eigenwert λ. Dazu sei $0 \neq v_1 \in E_\lambda(A)$.
- Setzen diesen Eigenvektor zu einer Orthonormalbasis $v_1, b_1, ..., b_n$ fort. Dies geht immer, da $V = \text{span}\{v_1\} \oplus \{v_1\}^\perp$ ist, und wir innerhalb von $\text{span}\{v_1\}^\perp$ immer eine Orthonormalbasis finden können.
  Dann nimmt F bzgl. dieser Basis die Form
  $$\tilde{A} = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda & X \\ 0 & B \end{pmatrix}, \; X = (x_2, .., x_n) \in M(1 \times (n-1), \mathbb{C}), \; B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$$
  an. Dabei ist U die Transformationsmatrix zwischen den beiden Orthonormalbasen, und daher unitär, das heißt $U^H = U^{-1}$. Somit folgt
  $$\tilde{A}^H\tilde{A} = \left(U^{-1}AU\right)^H U^{-1}AU = U^H A^H \underbrace{\underbrace{\left(U^{-1}\right)^H}_{U} U^{-1}}_{I} AU = U^{-1}A^H AU$$
  $$= U^{-1}AA^H U = \underbrace{U^{-1}AU}_{\tilde{A}} U^{-1}A^H U = \tilde{A}U^H A^H \left(U^{-1}\right)^H = \tilde{A}\left(U^{-1}AU\right)^H = \tilde{A}\tilde{A}^H$$
  das heißt $\tilde{A}$ ist Normal.
- Dann gilt insbesondere
  $$\left(\tilde{A}\tilde{A}^H\right)^1_1 = \tilde{A}^1_k \left(\tilde{A}^H\right)^k_1 = \sum_{k=1}^n \tilde{A}^1_k \overline{\tilde{A}}^1_k = |\lambda|^2 + \sum_{k=2}^n |x_k|^2$$
  $$= \left(\tilde{A}^H A\right)^1_1 = \left(\tilde{A}^H\right)^1_k \tilde{A}^k_1 = \sum_{k=1}^n \overline{\tilde{A}}^k_1 \tilde{A}^k_1 = |\lambda|^2 \;\Rightarrow\; |x_k| = 0 \;\; \forall\, k \geq 2$$
  Somit ist $X = (0, .., 0)$ und $\tilde{A}$ hat die Gestalt
  $$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$
- Wegen
  $$\begin{pmatrix} |\lambda|^2 & 0 \\ 0 & B^H B \end{pmatrix} = \tilde{A}^H\tilde{A} = \tilde{A}\tilde{A}^H = \begin{pmatrix} |\lambda|^2 & 0 \\ 0 & BB^H \end{pmatrix}$$
  ist auch $B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ eine Normalmatrix und deshalb nach Induktionsannahme diagonalisierbar, das heißt $\exists\, L \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ mit
  $$\tilde{B} = L^{-1}BL$$
  in Diagonalform. Dann ist auch
  $$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1} \cdot \tilde{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}}_{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^{-1} \end{pmatrix} \cdot \tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & L^{-1}BL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}$$
  in Diagonalform, das heißt $\tilde{A}$ ist diagonalisierbar.
- Doch da Ähnlichkeit eine Äquivalenzrelation ist, ist auch $A \sim \tilde{A}$ diagonalisierbar. □

b) **Hilfsaussage:** Gilt für zwei Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$: $AB = I$, dann ist $B = A^{-1}$ und somit auch $BA = I$.
Beweis: Wegen $1 = \det(I) = \det(AB) = \det(A)\det(B)$ gilt insbesondere $\det(A), \det(B) \neq 0$. Somit existieren A^{-1} und B^{-1}. Daraus folgt sofort
$$A^{-1} = A{-}1 \cdot I = A^{-1}AB = B$$

- Für (reelle) orthogonale Matrizen R ist insbesondere $\overline{R} = R$. Wegen Hilfsaussage ist außerdem $R^T R = RR^T = I$, also
  $$R^H R = \overline{R^T} R = R^T R = RR^T = R\overline{R^T} = RR^H$$
  Somit ist nach Teil (a) jede orthogonale Matrix über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

- Für symmetrische Matrizen R wegen $R^T = R$ insbesondere $\overline{R^T}R = R^TR = RR = RR^T = R\overline{R^T}$. Analog für antisymmetrische Matrizen, ist $\overline{R^T}R = R^TR = -RR = RR^T = R\overline{R^T}$. Somit sind (anti)symmetrische Matrizen diagonalisierbar.
- Durch die Hilfsaussage wissen wir das auch $UU^H = I$ gilt. Somit ist für unitäre Matrizen $U^HU = I = UU^H$. Nach Teil (a) sind sie also diagonalisierbar.
- Hermitesche bzw. antihermitesche Matrizen erfüllen wegen $A^H = A$ auch:

  $$A^HA = AA = AA^H \text{ bzw. } A^HA = -AA = AA^H$$

  und sind somit ebenfalls diagonalisierbar.

Aufgabe 02

a) Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix mit dem charakteristischen Polynom p_A und dem Minimalpolynom μ_A. Damit sind die Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_m$ (Nullstellen von p_A) festgelegt. Die (eindeutige) algebraische Vielfachheit P_{λ_i} von λ_i als Nullstelle in p_A ist identisch der Summe der Größen der Jordan-Kästchen bzgl. des Eigenwertes λ_i. Die algebraische Vielfachheit μ_{λ_i} von λ_i als Nullstelle in μ_A ist genau die Größe des größten Jordan-Kästchens bzgl. λ_i. Jedem Eigenwert λ_i entspricht mindestens ein J.K. von einer Mindestgröße 1.
Spezialfall: $n = 3$.

- Fall: A besitzt genau einen Eigenwert λ und es ist $\mu_\lambda = 1$. Dann ist notwendigerweise die Jordan-Form von A identisch λI.
- Fall: A besitzt genau einen Eigenwert λ und es ist $\mu_\lambda = 2$. Dann besteht die J.F. von A aus einem J.K der Größe 2 und einem J.K der Größe 1.
- Fall: A besitzt genau einen Eigenwert λ und es ist $\mu_\lambda = 3$. Dann ist die J.F. von A gegeben durch $J_3(\lambda)$.
- Fall: A besitzt genau 2 Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Dann muss notwendigerweise gelten $P_{\lambda_1} = 1,\ P_{\lambda_2} = 2$ oder $P_{\lambda_2} = 1,\ P_{\lambda_1} = 2$. Sei o.B.d.A $P_{\lambda_1} = 1$. Dann gibt es zu λ_1 genau ein J.K. der Größe 1. Ist nun $\mu_{\lambda_2} = 2$ so gibt es nur ein J.K. zu λ_2. Ist andernfalls $\mu_{\lambda_2} = 1$ so gibt es genau 2 J.K. zu λ_2.
- Fall: A besitzt 3 verschiedene Eigenwerte. Dann gehört notwendigerweise zu jedem Eigenwert genau ein J.K. der Größe 1.

Somit ist die Jordan-Form, bis auf Umordnungen der J.K., eindeutig bestimmt. □

b) Nennen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen die charakteristischen Polynome

$$p_A(X) = \det(XI - A) = (X-1)^2(X+1)$$

$$P_B(X) = \det(XI - B) = (X-1)^2(X+1)$$

$$\rightarrow \text{ Eigenwerte: } 1, -1$$

und die Minimalpolynome

$$\mu_A(X) = (X-1)(X+1)$$

$$\mu_B(X) = (X-1)^2(X+1)$$

so dass sich die Jordan-Formen A_J, B_J nach oberen Überlegungen ergeben als

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \ , \ B_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 03

a) Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix, das heißt $A^T A = AA^T = I$. Da A reell ist, ist insbesondere $A^H A = AA^H = I$. Sei nun $0 \neq v = v^i e_i$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ. Dann folgt:

$$|\lambda|^2 = \overline{\lambda}\lambda v^H v = (\lambda v)^H (\lambda v) = (Av)^H (Av) = v^H \underbrace{A^H \cdot A}_{I} v = v^H v = \sum_{i=1}^n \overline{v^i} v^i = \underbrace{\sum_{i=1}^n \left|v^i\right|^2}_{>0 \text{ da } v \neq 0} > 0 \;\Rightarrow\; |\lambda|^2 = 1 \;\Rightarrow\; |\lambda| = 1$$

b) Sei $R \in M_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix.

- Betrachten wir den durch R induzierten Endomorphismus $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ so hat der komplexifizierte Endomorphismus $F_{\mathbb{C}}$ bzgl. der Basis $\{e_j + i \cdot \vec{0}\}_j$ genau die gleiche Matrix R. Doch diese ist nun wieder in $M_n(\mathbb{C})$ nach Aufgabe 01 diagonalisierbar, das heißt $F_{\mathbb{C}}$ ist diagonalisierbar. Somit ist $R \in M_n(\mathbb{R})$ nach Satz 05 ähnlich zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_k & & & \\ & & & A_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & A_m \end{pmatrix} \;,\; A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

  wobei $\{\lambda_i\}$ die reellen Eigenwerte von R sind, das heißt nach Teil (a): $\lambda_i = \pm 1$.

- Das charakteristische Polynom p_R von R ist identisch dem charakteristischen Polynom p_A:

$$p_R(X) = p_A(X) = \prod_{j=1}^k (X - \lambda_k) \cdot \prod_{j=1}^m p_{A_i}(X) \;,\; p_{A_i}(X) = \det(XI - A_i) = X^2 - 2a_i X + (a_i^2 + b_i^2)$$

  Somit sind insbesondere die Nullstellen $\rho_i = a_i \pm i\,|b_i|$ von p_{A_i} Eigenwerte von R. Da stets gilt: $|\rho_i| = 1$ muss gelten: $a_i^2 + b_i^2 = 1$.

- Wegen $a_i^2 + b_i^2 = 1$ muss insbesondere $|a_i| \leq 1$ sein. Setzen also $\varphi_i' \in [0, \pi]$ so dass $a_i = \cos\varphi_i'$ ist (solch ein φ_i' existiert immer). Dann ist

$$b_i^2 = 1 - \cos^2\varphi_i' = \sin^2\varphi_i' \;,\; \sin\varphi_i' \geq 0$$

  Ist $b_i \geq 0$ so setzen $\varphi_i := \varphi_i'$, andernfalls setzen $\varphi_i := 2\pi - \varphi_i'$. Somit ist dann erfüllt:

$$a_i = \cos\varphi_i' = \cos\varphi_i,\; b_i = \sin\varphi_i \;\to\; A_i = \begin{pmatrix} \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

  Bemerke: Ist $\varphi_i \in \{0, 2\pi\}$ so ist

$$A_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

  und A ist so (bis auf Umordnungen der Kästchen A_i, die ja durch Basis-Umtausch erlaubt sind) wieder in der gewünschten Form. Somit können wir o.B.d.A sagen $\varphi_i \in (0, 2\pi)$ für die A_i.

- Somit ist der Satz bewiesen. $\square$

Aufgabe 04

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ kommutierende Nilpotente Matrizen, das heißt $AB = BA$ und $A^a = B^b = 0$ für geeignete $a, b \in \mathbb{N}$. Dann ist auch

$$(AB)^a = \underbrace{(AB)(AB)\dots(AB)}_{a \text{ mal}} = AABB(AB)(AB)\dots(AB) = AABABB(AB)\dots(AB) = AAABBB(AB)\dots(AB)$$

$$\overset{\substack{\text{nach}\\\text{endlich}\\\text{vielen}\\\text{Schritten}}}{=} \underbrace{AA\dots A}_{a \text{ mal}}\underbrace{BB\dots B}_{a \text{ mal}} = \underbrace{A^a}_{0} B^a = 0$$

und analog:

$$(A+B)^{2(a+b)} \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{2(a+b)} \binom{2(a+b)}{k} A^k B^{2(a+b)-k} = \sum_{k=0}^{a+b} \binom{2a+2b}{k} A^k \underbrace{\overbrace{B^{2(a+b)-k}}^{\geq b}}_{\substack{=0 \\ \text{da } B^b=0}} + \sum_{k=(a+b+1)}^{2(a+b)} \binom{2a+2b}{k} \underbrace{\overbrace{A^{\quad k}}^{\geq a}}_{\substack{=0 \\ \text{da } A^a=0}} B^{2(a+b)-k} = 0$$

(*) Binomische Formel: gilt allgemein für kommutierende Elemente aus einem Ring. Da $M_n(\mathbb{K})$ ein Ring ist und ferner $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ kommutieren, sind alle Voraussetzungen erfüllt. Andernfalls wurde diese Behauptung in der Vorlesung LAAG2 bewiesen.
Somit sind AB und $A+B$ Nilpotent.

Beispiel: Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sind beide Nilpotent, denn $A^2 = B^2 = 0$. Doch die Matrizen

$$S := A + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ P := AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sind <u>nicht</u> nilpotent, denn zum einen ist

$$S^2 = I \ \rightarrow \ S^k = \left\{ \begin{array}{ll} S & : k \text{ ungerade} \\ I & : k \text{ gerade} \end{array} \right\} \neq 0$$

und zum anderen

$$Pe_1 = e_1 \ \rightarrow \ \forall \ k \in \mathbb{N} : P^k e_1 = e_1 \neq 0$$