Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 03 - Lösungen

Stilianos Louca

8. Mai 2008

Aufgabe 01

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ zwei $n \times n$ Matrizen über den Körper K mit den Jordanschen Normalforen A_J, B_J, d.h

$$A \sim A_J \ , \ B \sim B_J$$

wobei $\sim$ die Ähnlichkeits-Äquivalenzrelation darstellt. Somit gilt wegen Transitivität:

$$A_J \sim B_J \Leftrightarrow \ A \sim B$$

Jedoch ist die Jordansche Normalform einer Matrix eindeutig, so dass $A_J \sim B_J$ äquivalent zur Aussage $A_J \equiv B_J$ ist (Gleichheit bis auf Umordnungen der Jordan-Kästchen). Somit folgt die Äquivalenz

$$A_J \equiv B_J \ \Leftrightarrow \ A \sim B$$

Zeigen: Für eine $n \times n$ Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ mit der Jordanschen-Normalform A_J gilt: $A \sim A^T$.

- Betrachten zuerst das Jordan-Kästchen $J_r(\lambda) \in M_r(\mathbb{K})$ (Größe r zum Eigenwert λ) das als Endomorphismus F bzgl. der Basis $B = b_1, ..., b_r$ operiert:

$$J_r(\lambda) = {}_B M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

  Dann operiert F bzgl. der Basis

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \beta_1, ..., \beta_r \\ \beta_1 &:= b_r, ..., \beta_r := b_1 \end{aligned}$$

  als die Matrix

$$_{\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = (J_r(\lambda))^T$$

  denn

$$F(\beta_1) = F(b_r) = \lambda b_r + b_{r-1} = \lambda\beta_1 + \beta_2, \dots, F(\beta_r) = F(b_1) = \lambda b_1 = \lambda\beta_r$$

- Betrachten nun einen beliebigen Endomorphismus mit der Jordan-Matrix

$$A_J = \operatorname{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), .., J_{r_m}(\lambda_m)\right) \in M_n(\mathbb{K})$$

  bzgl. der Basis

$$B = b_1, .., b_{r_1}, b_{r_1+1}, .., b_{r_1+r_2}, .., b_{r_1+r_2+r_3}, .., b_n$$

Dann operiert F bzgl. der Basis

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B} = \beta_1, .., \beta_n \\
&\beta_1 := b_{r_1}, .., \beta_{r_1} := b_1 \\
&\beta_{r_1+1} := b_{r_1+r_2}, .., \beta_{r_1+r_2} := b_{r_1+1} \\
&\vdots \\
&\beta_{r_1+..+r_{m-1}+1} := b_n, .., \beta_n := b_{r_1+..+r_{m-1}+1}
\end{aligned}$$

als die Matrix

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(F) = \operatorname{diag}\left((J_{r_1}(\lambda_1))^T, \ldots, (J_{r_m}(\lambda_m))^T\right) = \operatorname{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), .., J_{r_m}(\lambda_m)\right)^T = \left({}_BM_B(F)\right)^T = (A_J)^T$$

Somit ist für eine beliebige Jordan-Matrix $A_J \sim (A_J)^T$.

- Sei nun $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine beliebige Matrix mit der Jordan-Form A_J, d.h

$$\exists\ T \in M_n(\mathbb{K}) : A_J = TAT^{-1}$$

Dann ist wegen

$$(A_J)^T = \left(TAT^{-1}\right)^T = T^TA^T\left(T^{-1}\right)^T = T^TA^T\left(T^T\right)^{-1}$$

auch $(A_J)^T \sim A^T$.

- Betrachten schließlich eine beliebige triangulierbare Matrix A. Diese ist ähnlich zu ihrer Jordan-Form A_J:

$$A \sim A_J$$

Somit ist

$$\boxed{A \sim A_J \sim (A_J)^T \sim A^T}$$

Spezialfall: Sei nun $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine komplexe $n\times n$ Matrix. Da ihr charakteristisches Polynom $p_A \in \mathbb{C}[X]$ immer als Produkt linearer Faktoren schreibbar ist, kann A immer in Jordanscher Normalform übergebracht werden. Somit ist $A \sim A^T$. $\square$

Aufgabe 02

Sei F der durch die betrachtete Matrix A induzierte Endomorphismus.

- Durch scharfes hinschauen erkennt man: $v_1 := (1,0,0,1)$ ist ein Eigenvektor zu A mit dem Eigenwert $\lambda_1 = 2$. Ebenso erkennt man, $v_2 := (0,1,1,0)$ ist auch ein Eigenvektor von A mit ebenfalls dem Eigenwert $\lambda_1 = 2$.
- Sei nun $B := A - \lambda_1 I$. Es ist:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -8 & 8 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 32 & -32 & 0 \\ 0 & 16 & -16 & 0 \\ 0 & 16 & -16 & 0 \end{pmatrix}, \ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & -64 & 64 & 0 \\ 0 & -128 & 128 & 0 \\ 0 & -64 & 64 & 0 \\ 0 & -64 & 64 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus sofort abzulesen ist, dass $\operatorname{rang} B = 2$ und $\operatorname{rang} B^2 = \operatorname{rang} B^3 = 1$ ist (jeweils Anzahl der linear unabhängigen Spalten). Also $\dim\operatorname{kernel} B = 2$ und $\dim\operatorname{kernel} B^2 = \dim\operatorname{kernel} B^3 = 3$.
Nennen $K_B^n := \operatorname{kernel} B^n$. Dann ist B^n auf K_B^n nilpotent und ferner K_B^n B-invariant, denn für $v \in K_B^n$ ist auch

$$B^nBv = BB^nv = B0 = 0 \ \rightarrow \ Bv \in K_B^n$$

- Wir sehen dass der Vektor $b_1 := (1,0,0,0)$ in K_B^2 ist (denn $B^2b_1 = 0$) und außerdem $Bb_1 = (-1,-1,-1,-1) =: b_2 \neq 0$. Und wie es der Zufall will sind die Vektoren v_1, b_1, b_2 sogar linear unabhängig. Da sie auch alle in K_B^2 sind, bilden sie davon eine Basis. Es gilt insbesondere:

$$(A-2I)b_2 = Bb_2 = B^2b_1 = 0 \ \rightarrow \ Ab_2 = 2b_2$$

$$(A-2I)b_1 = Bb_1 = b_2 \ \rightarrow \ Ab_1 = 2b_1 + b_2$$

$$Av_1 = 2v_1$$

das heißt bzgl. der Basis b_2, b_1, v_1 nimmt der Endomorphismus F in $K_B^2 = \text{span}\{b_2, b_1, v_1\}$ die Matrixform

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

an.

- Finden wir nun einen weiteren Eigenvektor $b_4 \in \mathbb{R}^4$ (insofern dieser existiert), so dass $\mathbb{R}^4 = K_B^2 \oplus \text{span}\{b_4\}$ ist, so sind wir fertig, denn dann ist auch $Fb_4 \sim b_4 \notin K_B^2$, das heißt $\text{span}\{b_4\}$ ist F-invariant. Das charakteristische Polynom p_A von A ist gegeben durch

$$p_A(X) = \det(XI - A) = (x-2)^3(x+2)$$

woran man erkennt dass $\lambda_2 := -2$ auch ein Eigenwert von A ist. Durch das Gauss-Jordan-Verfahren findet man einen Eigenvektor $b_4 := (1, 2, 1, 1)$ zu λ_2. So operiert F bzgl. der Basis $B = b_2, b_1, v_2, b_4$ als

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

was genau die Jordansche Normalform von A darstellt.

- Die entsprechende Basistransformationsmatrix $T = {}_BM_K(I)$ (K: kanonische Basis) ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ b_2 & b_1 & v_2 & b_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine anschließende Probe bestätigt das Ergebnis.

Aufgabe 03

a) Betrachten zuerst die Blockmatrix

$$\mathcal{J}_n^m = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}) \ , \ 1 \leq m \leq n \quad , \quad I_m \in M_m(\mathbb{C}) : \text{Einheitsmatrix}$$

und finden durch direktes Ausrechnen:

$$m \geq 2 : \quad \mathcal{J}_n^{n-1} \cdot \mathcal{J}_n^m = \mathcal{J}_n^{m-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m \leq 1 : \quad \mathcal{J}_n^{n-1} \cdot \mathcal{J}_n^m = 0$$

was insbesondere Impliziert:

$$\left(\mathcal{J}_n^{n-1}\right)^k = \underbrace{\mathcal{J}_n^{n-1} \cdot \dots \cdot \mathcal{J}_n^{n-1}}_{(k-1)-\text{mal}} \cdot \mathcal{J}_n^{n-1} = \begin{cases} \mathcal{J}_n^{n-k} & : k < n \\ 0 & : k \geq n \end{cases}$$

Somit gilt für den Jordan-Block:

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{J}_n^{n-1} \ \rightarrow \ (J_n(0))^k = \begin{cases} \mathcal{J}_n^{n-k} & : k < n \\ 0 & : k \geq n \end{cases}$$

woraus für den Jordan-Block $J_n(\lambda)$ folgt:

$$(J_n(\lambda))^k = (\lambda I_n + J_n(0))^k \overset{*}{=} \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} (J_n(0))^m (\lambda I_n)^{k-m} = \sum_{m=0}^{\min\{n-1,k\}} \binom{k}{m} \lambda^{k-m} \mathcal{J}_n^{n-m}$$

$$= \begin{pmatrix} \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \dots \\ & \binom{k}{0}\lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \dots \\ & & \binom{k}{0}\lambda^k & \dots \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$(*)$: Binomischer Lehrsatz. Gilt, da $M_n(\mathbb{C})$ ein Ring, mit $I_n \cdot J_n(0) = J_n(0) \cdot I_n$ ist

Es gilt außerdem: Jede Matrix $\mathcal{J}_n^{n-m}$ besteht nur aus einer m-ten (oberen) Nebendiagonalen, deren Einträge alle 1 sind. Somit besteht auch jede Linearkombination, insbesondere die oben dargestellte, bzw. sogar jedes Polynom

$$p(J_n(\lambda)) = \sum_{k=0}^{N} a_k (J_n(\lambda))^k \cong \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathcal{J}_n^{n-k}$$

in $J_n(\lambda)$, aus (oberen) Nebendiagonalen die alle jeweils in allen Einträgen gleich sind, denn

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cdot \mathcal{J}_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_k I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & a_1 \\ & & & a_0 \end{pmatrix} \quad \square$$

b) Betrachten eine beliebige Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & a_1 \\ & & & a_0 \end{pmatrix}$$

Dann ist diese darstellbar als

$$A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \mathcal{J}_n^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(\mathcal{J}_n^{n-1}\right)^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (J_n(\lambda) - \lambda I_n)^k = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(J_n(\lambda) - \lambda (J_n(\lambda))^0\right)^k}_{\substack{\text{Polynom in } J_n(\lambda) \text{ von grad höchstens } n-1 \\ \text{Eindeutig durch die } \alpha_k \text{ bestimmt}}}$$

wobei eindeutig $\alpha_k = a_k$ sein muss, da die $\mathcal{J}_n^{n-k},\ k = 0,..,n-1$ eine Basis für den Raum aller solcher Matrizen A bilden (sie sind Erzeuger und linear unabhängig, da die nebendiagonalen unterschiedlicher Ordnung sich *nicht überschneiden*). $\square$

Aufgabe 04

Seien F, G jeweils die von A und B bzgl. der Standardbasis induzierten Endomorphismen. Es ist also $F \circ G = G \circ F$. Da die Matrix F komplex ist, hat sie immer eine Jordan-Normalform. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ von F, ist identisch der Anzahl der Jordan-Kästchen zu λ in der Jordan-Normalform. Die algebraische Vielfachheit entspricht dabei der Summe der Größen den J.K. zum Eigenwert.

Bemerkungen:

- Die Matrix B ist genau dann ein Polynom in A wenn der Endomorphismus G ein Polynom in F ist. Beziehen wir uns wiederum auf eine andere Basis $v_1, .., v_4$, bzgl. der F, G jeweils als die Matrizen $(F), (G)$ wirken, so ist G ein Polynom in F genau dann wenn (G) ein Polynom in (F) ist.

- Für beliebige Polynome $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ ist auch $P \circ Q$ ein Polynom aus $\mathbb{C}[X]$.

- Für diagonal-Blockmatrix $A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_m)$, $A_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$ und Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ ist

$$P(A) = \operatorname{diag}(P(A_1), .., P(A_m))$$

  Somit folgt für zwei diagonal-Blockmatrizen

$$A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_m) \ , \ B = \operatorname{diag}(B_1, ..., B_m) \, , \ A_i, B_i \in M_{n_i}(\mathbb{C})$$

  die Eigenschaft: B ist ein Polynom in A ($B = P(A)$) genau dann wenn $B_i = P(A_i)$ für $i = 1, .., m$ ist.

- Für beliebiges Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$, Endomorphismus F und Eigenvektor v mit Eigenwert λ, gilt:

$$P(F)v = P(\lambda)v$$

- Es gelte die Einsteinsche Summenkonvention.

a)
- Betrachten zuerst den Fall $n = 4$, wobei F nur einen Eigenwert λ haben sollte, das heißt die Jordan-Form von F besteht nur aus einem 4×4 Jordan-Kästchen (J.K.). Somit gibt es eine Basis $v_1, .., v_4$ von $\mathbb{C}^4$ mit

$$Fv_1 = \lambda v_1 \ , \ Fv_2 = \lambda v_2 + v_1 \ , \ Fv_3 = \lambda v_3 + v_2 \ , \ Fv_4 = \lambda v_4 + v_3$$

$$\rightarrow \ v_1 = (F - \lambda I)v_2 \ , \ v_2 = (F - \lambda I)v_3 \ , \ v_3 = (F - \lambda I)v_4$$

  Sei $Gv_4 = a^i v_i$. Machen den Ansatz

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i}$$

  und zeigen dass $\mathcal{G} = G$ ist. Nach dem Satz über lineare Fortsetzung, genügt es dies für die Basis $v_1, .., v_4$ zu zeigen, das heißt dass $\mathcal{G}v_i = Gv_i$ ist. Es ist:

$$\mathcal{G}v_4 = \sum_{i=1}^{4} a^i \underbrace{(F - \lambda I)^{4-i} v_4}_{v_i} = Gv_4$$

$$\mathcal{G}v_3 = \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_3 = (F - \lambda I) \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_4 = (F - \lambda I)Gv_4 \overset{*}{=} G(F - \lambda I)v_4 = Gv_3$$

$$\mathcal{G}v_2 = \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_2 = (F - \lambda I) \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_3 = (F - \lambda I)Gv_3 \overset{*}{=} G(F - \lambda I)v_3 = Gv_2$$

$$\mathcal{G}v_1 = \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_1 = (F - \lambda I) \sum_{i=1}^{4} a^i (F - \lambda I)^{4-i} v_2 = (F - \lambda I)Gv_2 \overset{*}{=} G(F - \lambda I)v_2 = Gv_1$$

  $(*)$: Kommutativität von F und G

  Also ist G Polynom in F und somit B Polynom in A.

- Betrachten den Fall $n = 4$ wobei F genau zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat mit jeweils der algebraischen Vielfachheit 2, das heißt die Jordan Form von F hat zwei J.K. mit jeweils der Größe 2 zu jedem Eigenwert. Dann gibt es analog zu vorhin eine Basis $v_1, .., v_4$ mit

$$Fv_1 = \lambda_1 v_1 \ , \ Fv_2 = \lambda v_2 + v_1 \ , \ Fv_3 = \lambda_2 v_3 \ , \ Fv_4 = \lambda v_4 + v_3$$

Wegen

$$FGv_1 = GFv_1 = \lambda_1 Gv_1 \ \rightarrow \ Gv_1 \in E_{\lambda_1}(F) \ \rightarrow \ Gv_1 = \mu_1 v_1$$

ist $Gv_2 = av_1 + \mu_1 v_2, \ a \in \mathbb{C}$ denn

$$FGv_2 = GFv_2 = G(\lambda_1 v_2 + v_1) = \lambda_1 Gv_2 + Gv_1 = \lambda_1 Gv_2 + \mu_1 v_1$$

$$Gv_2 = a^i v_i \ \Rightarrow \ a^i Fv_i = (a^1\lambda_1 + a^2)v_1 + a^2\lambda_1 v_2 + (a^3\lambda_2 + a^4)v_3 + a^4\lambda_2 v_4 = \lambda_1 a^i v_i + \mu_1 v_1$$

Komponentenvergleich: $\rightsquigarrow \ a^4 = a^3 = 0, \ a^2 = \mu_1$

Analog ergibt sich $Gv_3 = \mu_2 v_3$ und ferner $Gv_4 = bv_3 + \mu_2 v_4$. Bzgl. der Basis $\{v_i\}$ wirken also die Endomorphismen F und G als die Matrizen

$$(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \ , \ F_i = J_2(\lambda_i)$$

$$(G) = \begin{pmatrix} \mu_1 & a & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 & b \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{pmatrix} \ , \ G_1 = \begin{pmatrix} \mu_1 & a \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \ , \ G_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & b \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

Betrachten die Matrix

$$F' := F' - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_1' := \lambda_1 - \lambda_2 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\neq} 0$$

Versuchen Koeffizienten $a_0, .., a_N \in \mathbb{C}$ mit $\sum_{k=0}^{N} a_k {F'}^k = (G)$ zu finden, also (nach Aufgabe 03)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \begin{pmatrix} {\lambda_1'}^k & k{\lambda_1'}^{k-1} \\ 0 & {\lambda_1'}^k \end{pmatrix} = G_1 \ , \ a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = G_2$$

In Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & \dots & {\lambda_1'}^N \\ 0 & 1 & \dots & N{\lambda_1'}^{N-1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ a \\ \mu_2 \\ b \end{pmatrix}$$

Diese Koeffizienten $a_0, .., a_N$ existieren immer, genau dann wenn $\operatorname{rang}\Lambda = 4$ ist für geeignetes (bzw. genügend großes) $N \in \mathbb{N}$. Schon für $N = 3$ gilt jedoch:

$$\det\Lambda = \det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & {\lambda_1'}^2 & {\lambda_1'}^3 \\ 0 & 1 & 2\lambda_1' & 3{\lambda_1'}^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} {\lambda_1'}^2 & {\lambda_1'}^3 \\ 2\lambda_1' & 3{\lambda_1'}^2 \end{pmatrix} = {\lambda_1'}^4 \neq 0$$

das heißt $\operatorname{rang}\Lambda = 4$. Somit ist (G) immer als Polynom in F' darstellbar. Da jedoch F' selbst ein Polynom in (F) ist, ist (G) auch ein Polynom in (F).

- Betrachten den Fall $n = 4$ wobei F genau zwei Eigenwerte $\lambda_1 \neq \lambda_2$ hat mit jeweils der algebraischen Vielfachheit 1 und 3. Es gibt also eine Basis $v_1, .., v_4$ mit

$$Fv_1 = \lambda_1 v_1 \ , \ Fv_2 = \lambda_2 v_2 \ , \ Fv_3 = \lambda_2 v_3 + v_2 \ , \ Fv_4 = \lambda_2 v_4 + v_3$$

Wegen $FG = GF$ folgt dann

$$FGv_1 = GFv_1 = \lambda_1 Gv_1 \ \rightarrow \ Gv_1 \in E_{\lambda_1}(F) \ \rightarrow \ Gv_1 = \mu_1 v_1, \ \mu_1 \in \mathbb{C}$$

Analog: $Gv_2 = \mu_2 v_2$

$$FGv_3 = GFv_3 = G(\lambda_2 v_3 + v_2) = \lambda_2 Gv_3 + Gv_2 \ , \ FGv_4 = GFv_4 = \lambda_2 Gv_4 + Gv_3$$

$$Gv_3 = a^i v_i \ \rightarrow \ Fa^i v_i = a^1 \lambda_1 v_1 + a^2 \lambda_2 v_2 + a^3(\lambda_2 v_3 + v_2) + a^4(\lambda_2 v_4 + v_3) = \lambda_2 a^i v_i + \mu_2 v_2$$

Komponentenvergleich: $\rightsquigarrow \ a^1 = a^4 = 0, \ a^3 = \mu_2 \ \rightarrow \ Gv_3 = a^2 v_2 + \mu_2 v_3$

und analog

$$Gv_4 = b^i v_i \ \rightarrow \ Fb^i v_i = b^1 \lambda_1 v_1 + b^2 \lambda_2 v_2 + b^3(\lambda_2 v_3 + v_2) + b^4(\lambda_2 v_4 + v_3) = \lambda_2 b^i v_i + a^2 v_2 + \mu_2 v_3$$

Komponentenvergleich: $\rightsquigarrow \ b^1 = 0, \ b^3 = a^2, \ b^4 = \mu_2 \ \rightarrow \ Gv_4 = b^2 v_2 + a^2 v_3 + \mu_2 v_4$

Bzgl. der Basis $\{v_i\}$ wirken also die Endomorphismen F und G als die Matrizen

$$(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & F_2 \end{pmatrix} \ , \ F_1 = (\lambda_1) \ , \ F_2 = J_3(\lambda_2)$$

$$(G) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & a^2 & b^2 \\ 0 & 0 & \mu_2 & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \ , \ G_1 = (\mu_1) \ , \ G_2 = \begin{pmatrix} \mu_2 & a^2 & b^2 \\ 0 & \mu_2 & a^2 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$$

Betrachten analog zu vorhin die Matrix

$$F' := F - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_1' := \lambda_1 - \lambda_2 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{\neq} 0$$

Versuchen Koeffizienten $a_0, .., a_N \in \mathbb{C}$ zu finden, so dass $\sum_{k=0}^{N} a_k {F'}^k = (G)$ ist, also nach Aufgabe 03:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k {\lambda_1'}^k = \mu_1 \ , \ a_0 I + a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = G_2$$

In Matrizenschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & {\lambda_1'}^2 & \dots & {\lambda_1'}^N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ a^2 \\ b^2 \end{pmatrix}$$

Für beliebige μ_1, μ_2, a^2, b^2 existieren immer die entsprechenden Koeffizienten a_i, genau dann wenn $\operatorname{rang}\Lambda = 4$ für ein geeignetes $N \in \mathbb{N}$ ist. Doch schon für $N = 3$ ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & {\lambda_1'}^2 & {\lambda_1'}^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & {\lambda_1'}^3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -{\lambda_1'}^3 \neq 0$$

das heißt $\operatorname{rang}\Lambda = 4$. Somit ist (G) ein Polynom in $F' = (F) - \lambda_2 I$ und deshalb auch von (F).

- Betrachten den Fall $n = 4$ wobei F 3 verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ mit (o.B.d.A) jeweils der algebraischen Vielfachheit $1, 1, 2$ hat. Es existiert also eine Basis $v_1, .., v_4$ mit

$$Fv_1 = \lambda_1 v_1 \ , \ Fv_2 = \lambda_2 v_2 \ , \ Fv_3 = \lambda_3 v_3 \ , \ Fv_4 = \lambda_3 v_4 + v_3$$

Kommutiert G mit F, so folgt

$$i \leq 3 : FGv_i = GFv_i = G\lambda_i v_i = \lambda_i G v_i \ \rightarrow \ Gv_i \in E_{\lambda_i}(F) \ \rightarrow \ Gv_i = \mu_i v_i, \ \mu_i \in \mathbb{C}$$

$$\text{Für } Gv_4 = a^i v_i : FGv_4 = a^i F v_i = a^1 \lambda_1 v_1 + a^2 \lambda_2 v_2 + a^3 \lambda_3 v_3 + a^4(\lambda_3 v_4 + v_3) = GFv_4 = \lambda_3 G v_4 + \underbrace{Gv_3}_{\mu_3 v_3}$$

$$\text{Komponentenvergleich: } \rightsquigarrow \ a^1 = a^2 = 0, \ a^4 = \mu_3 \ \rightarrow \ Gv_4 = av_3 + \mu_3 v_4 \ , \ a \in \mathbb{C}$$

Die Endomorphismen F, G wirken also bzgl. der Basis $\{v_i\}$ als die Matrizen

$$(F) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_3 \end{pmatrix} \ , \ F_1 = J_1(\lambda_1) \ , \ F_2 = J_1(\lambda_2) \ , \ F_3 = J_2(\lambda_3)$$

$$(G) = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & a \\ 0 & 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 \end{pmatrix} \ , \ G_1 = (\mu_1) \ , \ G_2 = (\mu_2) \ , \ G_3 = \begin{pmatrix} \mu_3 & a \\ 0 & \mu_3 \end{pmatrix}$$

Betrachten die Matrix

$$F' = (F) - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} \lambda_1' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \lambda_1' = \lambda_1 - \lambda_3 \overset{\lambda_1 \neq \lambda_3}{\neq} 0, \ \lambda_2' = \lambda_2 - \lambda_3 \overset{\lambda_2 \neq \lambda_3}{\neq} 0$$

Versuchen Koeffizienten $a_0, .., a_N \in \mathbb{C}$ zu finden, so dass $\sum_{k=0}^{N} a_k {F'}^k = G$ ist, also (nach Aufgabe 03)

$$\sum_{k=0}^{N} a_k {\lambda_1'}^k = \mu_1 \ , \ \sum_{k=0}^{N} a_k {\lambda_2'}^k = \mu_1 \ , \ a_0 = \mu_1 \ , \ a_1 = a$$

In Matrizen-Schreibweise also:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & {\lambda_1'}^2 & \ldots & {\lambda_1'}^N \\ 1 & \lambda_2' & {\lambda_2'}^2 & \ldots & {\lambda_2'}^N \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ a \end{pmatrix}$$

Diese Koeffizienten existieren immer (das heißt für beliebige μ_i, a), genau dann wenn rang $\Lambda = 4$ für ein geeignetes (bzw. genügend großes) $N \in \mathbb{N}$ ist. Doch schon gleich für $N = 3$ ist

$$\det\Lambda = \det\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1' & {\lambda_1'}^2 & {\lambda_1'}^3 \\ 1 & \lambda_2' & {\lambda_2'}^2 & {\lambda_2'}^3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} {\lambda_1'}^2 & {\lambda_1'}^3 \\ {\lambda_2'}^2 & {\lambda_2'}^3 \end{pmatrix} = (\lambda_1'\lambda_2')^2\,(\lambda_2' - \lambda_1') \neq 0$$

das heißt rang $\Lambda = 4$. Somit existiert ein Polynom $P(X) = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$ mit $P(F') = (G)$. Doch da F' selbst ein Polynom von (F) ist, ist auch $P(F')$ ein Polynom in (F).

- Betrachten den Fall $n = 4$ wobei F 4 verschieden Eigenwerte $\lambda_1, .., \lambda_4$ hat. Somit existiert eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, .., v_4$ jeweils zu den Eigenwerten $\lambda_1, .., \lambda_4$ und die Eigenräume span$\{v_i\}$ sind F invariant. Es ist somit:

$$FGv_i = GFv_i = G\lambda_i v_i = \lambda_i G v_i \;\rightarrow\; Gv_i \in E_{\lambda_i}(F) \text{ bzw. } Gv_i = \mu_i v_i \;,\; \mu_i \in \mathbb{C}$$

Machen den Ansatz

$$\mathcal{G} = \sum_{i=1}^{4} \left\{ \frac{\mu_i}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \cdot \prod_{j\neq i}(F - \lambda_j I) \right\}$$

und zeigen dass $\mathcal{G}$ in der Basis $\{v_i\}$ und somit in ganz $\mathbb{C}^4$ identisch G ist:

$$\mathcal{G}v_k = \sum_{i=1}^{4} \frac{\mu_i}{\prod_{j\neq i}(\lambda_i - \lambda_j)} \cdot \underbrace{\prod_{j\neq i}(F - \lambda_j I)v_k}_{\substack{=0 \text{ für } i\neq k \\ \text{da } (F-\lambda_k I)v_k = 0}} = \frac{\mu_k}{\prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)} \cdot \prod_{j\neq k}(F - \lambda_j I)v_k$$

$$= \frac{\mu_k}{\prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)} \cdot \prod_{j\neq k}(\lambda_k - \lambda_j)v_k = \mu_k v_k = Gv_k$$

Somit ist $G = \mathcal{G}$ ein Polynom in F bzw. B ein Polynom in A.

- Haben den Satz für $n = 4$ gezeigt. Jetzt Induktion über n (nach unten). Sei $n \leq 3$ und es gelte die Aussage für $(n+1)$. Setzen die $n \times n$ Matrix von F zu einer $(n+1) \times (n+1)$ Matrix fort, gemäß

$$A' := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \;,\; \mu \in \mathbb{C}$$

und nennen F' den durch A' induzierten Endomorphismus. Sei μ so gewählt, dass für alle Eigenwerte λ_i von A gilt: $\lambda_i \neq \mu$. Dann gilt für $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$, $a \in \mathbb{C}$:

$$Av = \lambda v \;\Rightarrow\; A' \cdot \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A' \cdot \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av \\ \mu a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v \\ a \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; a = 0 \;\wedge\; Av = \lambda v$$

Das heißt die Eigenwerte von A sind auch Eigenwerte von A' und es existiert ein Isomorphismus zwischen den Eigenvektoren zu den gleichen Eigenwerten von A und A'(nämlich $v \leftrightarrow (v, 0)$). Somit ist die Dimension der Eigenräume $E_{\lambda_i}(A')$ zu allen Eigenwerten von A auch für A' genau 1. Da Ferner das charakteristische Polynom $p_{A'}$ sich von p_A nur um den Linearfaktor $(X - \mu)$ unterscheidet, ist μ ein Eigenwert von A' mit geometrischer Vielfachheit ($\leq$ algebraischer Vielfachheit $= 1$) genau 1. Man könnte auch anders argumentieren: Die Jordansche Normalform A_J' von A' ist gegeben durch

$$A_J' = \begin{pmatrix} A_J & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \;,\; A_J : \text{Jordan-Form von } A$$

denn für $A_J = T^{-1}AT$ ist

$$\underbrace{\begin{pmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_J & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = A'_J$$

so dass auch hier ersichtlich ist: Alle Eigenräume von A' haben Dimension 1.
Kommutiert ferner B mit A, so kommutiert auch

$$B' := \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit A'. Somit ist B' ein Polynom in A':

$$B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{N} a_k {A'}^k = \sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} a_k A^k & 0 \\ 0 & a_k \mu^k \end{pmatrix} \;\rightarrow\; B = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k$$

also auch B ein Polynom in A. Wegen Induktionsanfang ($n = 4$) gilt Aussage für alle $n \leq 4$. $\square$

b) Gegenbeispiel: Für $A = I_4$ kommutiert zwar jede Matrix B mit A, doch ist zum Beispiel die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

offensichtlich kein Polynom in I_4. Das liegt daran, dass die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 1 im Falle der Einheitsmatrix I_4 genau 4 ist.