3. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie unter Verwendung der Jordan-Normalform, dass jede komplexe $n \times n$-Matrix zu ihrer transponierten ähnlich ist.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Bringen Sie die folgende Matrix auf Jordan-Normalform und geben Sie die zugehörige Basistransformation an:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & -6 & 8 & 1 \\ -1 & -4 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *(1+3 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Potenzen eines $n \times n$-Jordan-Blockes

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

und zeigen Sie, dass jedes Polynom in J von der Form

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_0 & a_1 \\ & & & a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$$

ist.

(b) Beweisen Sie, dass umgekehrt jede Matrix dieser Form eindeutig als ein Polynom in J vom Grad kleiner als n darstellbar ist.

Hinweis: Schauen Sie sich die Potenzen von $J - \lambda \,\mathrm{Id}$ an.

Aufgabe 4 *(3+1 Punkte)*

Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren Eigenwerte sämtlich die geometrische Vielfachheit 1 besitzen, und B eine Matrix, welche mit A kommutiert.

(a) Beweisen Sie für $n \leq 4$, dass dann B ein Polynom in A ist.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst einen einzelnen Jordan-Block.

(b) Finden Sie ein Gegenbeispiel, wenn man die Voraussetzung über die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte fallen läßt.

Abgabe: Montag, 5. Mai, *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter http://caj.informatik.uni-jena.de.