Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Serie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

28. April 2008

Aufgabe 01

Nennen: $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ die Menge aller konstruierbarer Zahlen.
In der Vorlesung wurde gezeigt dass $\mathbb{N} \subset \mathcal{K}$ bzw. $\mathbb{Z} \subset \mathcal{K}$ sind. Da bei gegebenen $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ auch $\frac{a}{b} \in \mathcal{K}$ ist, ist auch $\mathbb{Q} \subset \mathcal{K}$. Da bei gegebenen $a, b, s_1 \in \mathbb{Q}$ auch $\sqrt{s_1}$ bzw. $a \cdot b$ und ferner $a + b\sqrt{s_1}$ konstruierbar sind, ist auch

$$\mathbb{K}_1 := \mathbb{K}\left(\sqrt{s_1}\right) = \{a + b\sqrt{s_1} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathcal{K}$$

für jedes beliebige $s_1 \in \mathbb{Q}$. Ist ferner $\mathbb{K}_{n-1} \subset \mathcal{K}$ für einen Körper $\mathbb{K}_{n-1}$, so ist nach dem selben Prinzip auch

$$\mathbb{K}_n := \mathbb{K}_{n-1}\left(\sqrt{s_n}\right) = \{a + b\sqrt{s_n} \mid a, b \in \mathbb{K}_{n-1}\} \subset \mathcal{K}$$

für beliebiges $s_n \in \mathbb{K}_{n-1}$. Das heißt für jede iterierte quadratische Erweiterung $\mathbb{K}_n$ ist $\mathbb{K}_n \subset \mathcal{K}$. Somit ist jeder Punkt in einer iterierten quadratischen Erweiterung $\mathbb{K}_n$ von $\mathbb{Q}$ konstruierbar. $\square$

Aufgabe 02

a) Betrachten den Schnitt $\mathcal{F} := \bigcap\limits_{\mathbb{F} \in F} \mathbb{F}$. Wir müssen zeigen: $\mathcal{F}$ ist abgeschlossen bzgl. Multiplikation "$\cdot$" und Addition "+", $0, 1 \in \mathcal{F}$, für jedes $a \in \mathcal{F}$ ist auch $-a \in \mathcal{F}$ und falls $a \neq 0$ ist auch $a^{-1} \in \mathcal{F}$.
Da jedes Element $\mathbb{F} \in F$ ein Unterkörper ist, ist insbesondere $0, 1 \in \mathbb{F} \quad \forall\, \mathbb{F} \in F$, also ist auch $0, 1 \in \mathcal{F}$. Sei nun $0 \neq a \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann ist a in jedem Unterkörper $\mathbb{F} \in F$. In jedem $\mathbb{F} \in F$ befinden sich also auch $-a$ und a^{-1} was impliziert: $-a, a^{-1} \in \mathcal{F}$. Für $a = 0$ ist sowieso $-a = 0 \in \mathcal{F}$. Seien jetzt $a, b \in \mathcal{F}$ beliebig. Dann ist

$$a, b \in \mathbb{F} \quad \forall\, \mathbb{F} \in F \;\Rightarrow\; a + b, a \cdot b \in \mathbb{F} \quad \forall\, \mathbb{F} \in F \;\Rightarrow\; a + b, a \cdot b \in \mathcal{F}$$

Somit ist $\mathcal{F}$ auch ein Unterkörper von $\mathbb{K}$. $\square$

b) Betrachten

$$\mathcal{F}_M := \bigcap_{\substack{\mathbb{F} \subset \mathbb{K} \text{ Unterkörper} \\ M \subset \mathbb{F}}} \mathbb{F}$$

Es gilt unter anderem: $M \subset \mathcal{F}_M$ und $\forall\, \mathbb{F} : M \subset \mathbb{F} \;\Rightarrow\; \mathcal{F}_M \subset \mathbb{F}$.
Sei jetzt $M = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ und $\mathbb{L} := \mathcal{F}_M$. Es ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{L}$ denn $\mathbb{L}$ ist ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ und $1 \in \mathbb{L}$, so dass $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ mal}} \in \mathbb{L}$$

Da $\mathbb{L}$ abgeschlossen bzgl. der Negation ist, ist ganz $\mathbb{Z} \subset \mathbb{L}$. Ferner ist $\mathbb{L}$ abgeschlossen bzgl. der Division (d.h Invertierung), also ist

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{q}{p} \mid q, p \in \mathbb{Z} \;,\; p \neq 0\right\} \subset \mathbb{L}$$

Da $\sqrt{2} \in \mathbb{L}$ ist, ist auch

$$\mathbb{L}_1 := \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{x + y\sqrt{2} \mid x, y \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{L}$$

Bemerke dass $\mathbb{L}_1$ ein Unterkörper ist (vgl. Vorlesung) mit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{L}_1$ und $\sqrt{2} \in \mathbb{L}_1$! Da $\sqrt{3} \in \mathbb{L}$ ist, ist auch

$$\mathbb{L}_2 := \mathbb{L}_1\left(\sqrt{3}\right) = \left\{x + y\sqrt{3} \mid x, y \in \mathbb{L}_1\right\} \subset \mathbb{L}$$

$\mathbb{L}_2$ ist auch wieder ein Körper, und insbesondere gilt $M = \left\{\sqrt{2}, \sqrt{3}\right\} \subset \mathbb{L}_2$. Doch da $\mathbb{L}$ <u>maximal</u> nur Elemente aus $\mathbb{L}_2$ enthalten kann (da Schnitt) und mindestens alle Elemente von $\mathbb{L}_2$ enthalten muss, ist $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2$. Jedes Element $p \in \mathbb{L}$ hat somit die Form

$$p = x + y\sqrt{3} = \left(a + b\sqrt{2}\right) + \left(c + d\sqrt{2}\right)\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3}\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\ ,\ x, y \in \mathbb{L}_1$$

Betrachten wir $\mathbb{L}$ als Vektorraum über $\mathbb{Q}$, so sind die Elemente $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6} \in \mathbb{L}$ erzeugend, also $\dim \mathbb{L} \leq 4$. Die Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ sind linear unabhängig, denn wäre

$$a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} = 0\ ,\ a, b, c \in \mathbb{Q}$$

so würde folgen

$$\underbrace{3c^2}_{\in\mathbb{Q}} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \underbrace{a^2 + 2b^2}_{\in\mathbb{Q}} + \underbrace{2ab}_{\in\mathbb{Q}}\sqrt{2}$$

$$\text{Da } \sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ bzw. } 1, \sqrt{3} \text{ linear unabhängig } \rightarrow\ a, b \neq 0\ \rightarrow\ \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$$

was ein Widerspruch ist. Analog zeigt man auch dass $1, \sqrt{2}, \sqrt{6}$ bzw. $1, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ linear unabhängig sind. Auch $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ sind nach dem gleichen Prinzip linear unabhängig, denn aus $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{6}\ ,\ (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ folgt der gleiche Widerspruch:

$$6c^2 = \left(a\sqrt{2} + b\sqrt{3}\right)^2 = 2a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{6}$$

$$a \neq 0 \text{ denn sonst wäre } b = c\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$$\text{Analog: } b \neq 0\ \rightarrow\ \sqrt{6} \in \mathbb{Q} \text{ Widerspruch!}$$

Nach der gleichen Logik beweist man: (*) : $1, \sqrt{2}, \sqrt{18}$ sind linear unabhängig. Ist jetzt

$$a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6} = 0\ ,\ a, b, c, d \in \mathbb{Q}\ ,\ (a, b, c, d) \neq (0, 0, 0, 0)$$

so muss wegen oben $a, b, c, d \neq 0$ sein. Doch dann wäre

$$a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = \left(a + b\sqrt{2}\right)^2 = \left(c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\right)^2 = 3c^2 + 6d^2 + 2cd\sqrt{18}$$

$$(*)\ \rightarrow\ ab = cd = 0$$

was ein Widerspruch ist! Somit sind auch die Vektoren $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}$ linear unabhängig und bilden eine Basis von $\mathbb{L}$. Insbesondere ist dann auch $\dim \mathbb{L} = 4$.

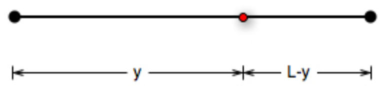
Aufgabe 03

a) Diese Aufgabe ist lösbar. Gegeben sei nämlich eine Strecke der Länge $L \in \mathbb{R}$. Die Zahl

$$x := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \in \mathbb{Q}\left(\sqrt{5}\right)$$

ist konstruierbar, da sie in einer iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ liegt. Somit ist bei gegebenem L auch die Zahl $y := x \cdot L$ konstruierbar. Es gilt außerdem $y > \dfrac{L}{2}$ und:

$$\frac{L-y}{y} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{\left(3-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{y}{L}$$

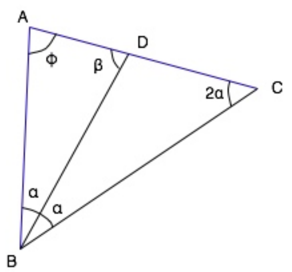


Somit ist die Konstruktionsaufgabe erfüllt.

b) Gegeben sei ein Würfel der Kantenlänge L. Gesucht ist der Radius R einer Kugel mit dem Volumen L^3, also $R = L\sqrt[3]{\dfrac{3}{4\pi}}$.
Wäre solch ein Radius konstruierbar, so wäre auch R^3 und ferner $\dfrac{3L^3}{4R^3}$ konstruierbar, da allgemein bei gegebenen Zahlen Produkte und Brüche konstruierbar sind. Doch erfüllt R obere Bedingung, so wäre $\pi = \dfrac{3L^3}{4R^3}$ und somit auch π konstruierbar. Jedoch wurde in der Vorlesung gegeben: π liegt in keiner iterierten quadratischen Erweiterung von $\mathbb{Q}$ und ist somit auch nicht konstruierbar!
Also ist die Konstruktionsaufgabe nicht lösbar. $\square$

Aufgabe 04

a) Betrachten das Gleichschenklige Dreieck ABC mit $AB = 1 = AC$ und $\widehat{BAC} =: \varphi = \dfrac{3\pi}{7}$.



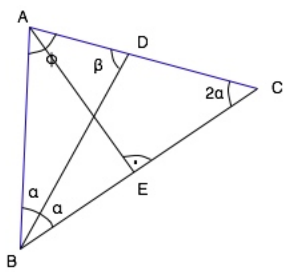
Dieses existiert immer. Betrachten jetzt die Winkelhalbierende BD des Winkels $\widehat{ABC} = 2\alpha$. Aus dem Bild ist sofort abzulehsen

$$2\alpha = \frac{1}{2}\left[\pi - 2\varphi\right] = \frac{2\pi}{7} \;\rightarrow\; \alpha = \frac{\pi}{7}$$

Somit ergibt sich für den Winkel $\widehat{BDA} = \beta$:

$$\beta = \pi - \varphi - \alpha = \frac{3\pi}{7} = \varphi$$

weshalb folgt $BD = BA = AC$. Somit existiert das Dreieck in Frage immer.
Sei nun andernfalls ABC ein Gleichschenkliges Dreieck, mit $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} =: 2\alpha$ und $\widehat{BAC} =: \varphi$.



Die Winkelhalbierende AE von $\widehat{BAC}$ steht senkrecht auf BC und ist somit kleiner als die beiden Schenkel. Betrachten also eine der anderen beiden Winkelhalbierenden, o.B.d.A BD. Dann ist aus dem Bild abzulesen:

$$\beta = \pi - (\pi - 3\alpha) = 3\alpha \ \wedge \ \varphi + 4\alpha = \pi$$

Erfüllt diese nun die Voraussetzung $BD = AB = AC$ so folgt $\beta = \varphi$ und somit $\varphi = 3\alpha$ also $\varphi = \frac{3\pi}{7}$. Somit ist das Dreieck bis auf ähnliche Dreiecke eindeutig bestimmt.

b) Annahme: Solch ein Dreieck ABC ist mit Zirkel und Lineal konstruierbar. Dann ist insbesondere der Winkel $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{7}$ und somit auch ein reguläres 7-Eck konstruierbar (einfach einen Kreis in 7 gleiche Sektoren teilen und so die Ecken eines reguläres n-Eck konstruieren). Dies ist ein Widerspruch, denn in der Vorlesung wurde bewiesen: ein reguläres 7-Eck ist nicht konstruierbar. Somit ist auch solch ein Dreieck nicht konstruierbar. $\square$