Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2008
Serie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

17. Mai 2008

Aufgabe 01

a) Richtung "$\Rightarrow$".
Sei M eine unendliche Menge. Ist die Menge abzählbar, dann seien $x_i,\ i \in \mathbb{N}$ ihre Elemente und

$$Q_2 := \{x_i \mid i \text{ gerade}\} \subset M$$

Definieren eine Bijektion

$$f : M \to Q_2\ ,\ x_i \mapsto x_{2i}$$

Ist andernfalls M überabzählbar, dann suchen eine abzählbare, unendliche Teilmenge

$$M' = \{x_i \in M,\ i \in \mathbb{N}\} \subset M\ ,\ x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j$$

aus, und setzen

$$Q_2 := \{x_i \in M' \mid i \text{ gerade}\} \subset M$$

wie vorhin. Definieren wiederum die Bijektion

$$f : M \to (M \setminus M') \cup Q_2\ ,\ x \mapsto \begin{cases} x & : x \notin M' \\ x_{2i} & : x = x_i \in M' \end{cases}$$

und zeigen so dass M zu einer echten Teilmenge (Q bzw. $(M \setminus M') \cup Q_2$) gleichmächtig ist.
Richtung "$\Leftarrow$"
Sei andernfalls M und $M' \subset M,\ M \neq M$ mit $|M| = |M'|$. Dann existiert eine Bijektion

$$f : M' \to M\ ,\ x \mapsto f(x)$$

zwischen den beiden Mengen M, M'. Wäre M (und somit auch M') endlich, so gäbe es Zahlen $n \in \mathbb{N}\ ,\ m \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|M| = n\ ,\ |M'| = m < n$$

Da f insbesondere surjektiv ist, muss $\operatorname{image} f = M$ sein. Doch nummerieren wir die Elemente $x_1, .., x_n$ von M bzw. $x'_1, .., x'_m$ von M', so sehen wir

$$|\operatorname{image} f| = |\{f(x'_1), .., f(x'_m)\}| = m \neq n = |M|$$

also ist $\operatorname{image} f \neq M$. Somit muss die Menge M unendlich sein. $\square$

b) Gehen analog zur oberen Betrachtung vor und suchen eine abzählbare Teilmenge $Q \subset [0,1]$ mit $1 \in Q$:

$$Q := \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \subset [0,1]$$

mit $Q \setminus \{1\} \subset [0,1)$.
Definieren die Abbildung

$$f : [0,1] \to [0,1)\ ,\ x \mapsto \begin{cases} x & : x \notin Q \\ \dfrac{1}{n+1} & : x = \dfrac{1}{n} \in Q \end{cases}$$

Diese ist offensichtlich auf ganz $[0,1]$ definiert, injektiv und surjektiv, mit der Umkehrabbildung

$$f^{-1} : [0,1) \to [0,1] \ , \ f^{-1}(x) = \begin{cases} x & : x \notin Q \\ \dfrac{1}{n-1} & : x = \dfrac{1}{n} \in Q \end{cases} \ , \ x \in [0,1)$$

also auch bijektiv.

c) Definieren die Abbildung

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \cap (0,1) \ , \ x \mapsto \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{4x} & : x > 1 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} & : x \in [-1,1] \\ -\dfrac{1}{4x} & : x < -1 \end{cases}$$

Diese Abbildung ist bijektiv, mit der Umkehrabbildung:

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4(1-y)} & : y \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right) \\ 4y - 2 & : y \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}\right] \\ -\dfrac{1}{4y} & : y \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$$

Bemerkung: Die einzigen Stellen wo Probleme mit der Umkehrung auftreten könnten sind die Grenzen der Teilintervalle. Doch es ist

$$f\left((1,\infty)\right) \cap f([-1,1]) = f\left((-\infty,-1)\right) \cap f([-1,1]) = f\left((1,\infty)\right) \cap f\left((-\infty,1)\right) = \emptyset$$

Aufgabe 03

Sei

$$A = (A_{ij}) \in M_n(\mathbb{C})$$

beliebig. Dann ist das charakteristische Polynom

$$p_A(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$$

von A immer in oberer Form darstellbar. Ist $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dann sind wir fertig, denn dann ist

$$\mathbb{C}^2 = E_{\lambda_1}(A) \oplus E_{\lambda_2}(A)$$

und somit A diagonalisierbar, d.h ähnlich zur Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Sei andernfalls $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$. Ist nun $E_\lambda(A) = \mathbb{C}^2$ sind wir auch fertig, da auch hier A diagonalisierbar ist. Sei also

$$E_\lambda(A) < \mathbb{C}^2 \ \to \ \exists\, 0 \neq v_1 \in \mathbb{C}^2 : v_1 \notin E_\lambda(A) \ \to \ v_2 := (A - \lambda I)v_1 \neq 0$$

Nach dem Satz von Caley-Hamilton gilt

$$0 = p_A(A) = (A - \lambda I)^2 \ , \ \text{Insbesondere: } (A - \lambda I)v_2 = 0 \ \to \ v_2 \in E_\lambda(A)$$

so dass die Vektoren v_1, v_2 linear unabhängig sind, denn sonst ergebe sich

$$v_2 = \mu v_1 \;\Rightarrow\; 0 = (A - \lambda I)v_2 = (A - \lambda I)\mu v_1 = \mu \underbrace{(A - \lambda I)v_1}_{\neq 0} \text{ Widerspruch!}$$

Somit bilden v_2, v_1 eine Basis von $\mathbb{C}^2$, und der durch A induzierte Endomorphismus F wirkt bzgl. dieser (in der Reihenfolge v_2, v_1) als die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ denn } Av_2 = \lambda v_2 \;,\; Av_1 = v_2 + \lambda v_1$$

Somit ist A ähnlich zu B, denn

$$B = TAT^{-1}$$

wobei T die (invertierbare) Basiswechselmatrix von v_2, v_1 nach der kanonischen Basis ist. $\square$

Aufgabe 04

Das charakteristische Polynom einer beliebigen Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist als Produkt linearer Faktoren darstellbar:

$$p_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

Sind $\lambda_i \neq \lambda_j \;\forall\; i \neq j$, so sind wir fertig, denn dann ist

$$\mathbb{C}^n = E_{\lambda_i}(A) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_n}(A)$$

d.h es existiert eine Basis aus Eigenvektoren für $\mathbb{C}^n$ und $A + tS$ ist für $S = 0$ diagonalisierbar.
Allgemein ist $A + tS$ genau dann diagonalisierbar wenn es eine Basis aus Eigenvektoren $v_1, .., v_n$ von $A + tS$ für $\mathbb{C}^n$ gibt.

Fall $n = 2$:

Ist A schon diagonalisierbar (z.B wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$), dann sind wir fertig ($S = 0$). Ansonsten (also $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda,\; E_\lambda(A) < \mathbb{C}^2$) gibt es nach Aufgabe (03) zwei Basisvektoren v_1, u mit

$$Av_1 = \lambda v_1 \;\wedge\; Au = \lambda u + v_1$$

Konstruieren S so dass $Sv_1 = 0$ und $Su = u$ ist. Sei jetzt $t > 0$ beliebig. Dann setzen wir $v_2 := \frac{1}{t} v_1 + u$ so dass gilt:

$$(A + tS)\, v_1 = Av_1 = Av_1 + t \underbrace{Sv_1}_{0} = \lambda v_1 \;\rightarrow\; v_1 \in E_\lambda(A + tS)$$

$$(A + tS)\, v_2 = Av_2 + tSv_2 = \frac{1}{t} Av_1 + Au + Sv_1 + tSu = \frac{\lambda}{t} v_1 + \lambda u + v_1 + tu = (\lambda + t) \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{t} v_1 + u\right)}_{v_2}$$

$$\Rightarrow\; v_2 \in E_{\lambda + t}(A + tS)$$

Da v_1, v_2 linear unabhängig sind, bilden diese beiden Eigenvektoren von $A + tS$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$. Somit ist $A + tS \in M_2(\mathbb{C})$ diagonalisierbar.

Fall $n = 3$:

Zurückführung auf den Fall $n = 2$.

- Sei $A \in M_3(\mathbb{C})$ und p_A das charakteristische Polynom von A. Da $p_A \in \mathbb{C}[X]$ ist, hat es mindestens eine Nullstelle weshalb A mindestens einen Eigenwert λ hat. Ist $0 \neq v_1 \in E_\lambda(A)$ so gilt $Av_1 = \lambda v_1$. Sei C_{v_1} ein Komplement von $\operatorname{span}\{v_1\}$, also
$$\mathbb{C}^3 = \operatorname{span}\{v_1\} \oplus C_{v_1}$$

Wählen eine Basis v_2, v_3 von C_{v_1} so dass gilt

$$\mathbb{C}^3 = \mathrm{span}\{v_1, v_2, v_3\} \ \wedge \ v_1^* A v_2 = v1^* A v_3 = 0 \ , \ v_1^*, v_2^*, v_3^* : \text{Dualbasis}$$

Bzgl. dieser Basis nimmt also der Endomorphismus A die Matrix

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

an, d.h es gibt eine invertierbare Matrix $T \in M_3(\mathbb{C})$ (ab nun fest) so dass $\tilde{A} = TAT^{-1}$ diagonal ist.

- Für die Matrix $B = (B_{ij}) \in M_2(\mathbb{C})$ gilt jedoch: es gibt eine Matrix S (ab nun fest) so dass für genügend kleine t die Matrix $B + tS$ diagonalisierbar ist, d.h dass es eine (eventuell von t abhängige) invertierbare Matrix Γ gibt, mit

$$\Gamma \, (B + tS) \, \Gamma^{-1} \text{ diagonal}$$

Setzen

$$\tilde{S} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$$

Bemerke: $\tilde{S}$ wird allein durch B geprägt.
Dann ist die Matrix $\tilde{A} + t\tilde{S}$ durch die Matrix

$$\tilde{\Gamma} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar, denn

$$\tilde{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\Gamma}\tilde{A}\tilde{\Gamma}^{-1} + \tilde{\Gamma}t\tilde{S}\tilde{\Gamma}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma B \Gamma^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Gamma t S \Gamma^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \Gamma(B + tS)\Gamma^{-1} \end{pmatrix} : \text{diagonal}$$

- Es ist jedoch

$$\tilde{\Gamma}\tilde{A}\tilde{\Gamma}^{-1} + \tilde{\Gamma}t\tilde{S}\tilde{\Gamma}^{-1} = \tilde{\Gamma}TAT^{-1}\tilde{\Gamma}^{-1} + \tilde{\Gamma}Tt\left(T^{-1}\tilde{S}T\right)T^{-1}\tilde{\Gamma}^{-1} = \tilde{\Gamma}TA\left(\tilde{\Gamma}T\right)^{-1} + \tilde{\Gamma}Tt\left(T^{-1}\tilde{S}T\right)\left(\tilde{\Gamma}T\right)^{-1}$$

Haben also gezeigt: Für beliebige Matrix A finden wir die entsprechende Matrix T und daraufhin $\Lambda := T^{-1}ST$ wie oben definiert. Betrachten also die Matrix $A + t\Lambda$. Für beliebiges t kann man dann ein $\Gamma \in M_2(\mathbb{C})$ und somit $\tilde{\Gamma} \in M_3(\mathbb{C})$ finden, so dass die Matrix $\tilde{\Gamma}T$ die Matrix $A + t\Lambda$ diagonalisiert. $\square$