1. Übungsserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(2+1+1 Punkte)*

(a) Beweisen Sie, dass eine Menge M genau dann unendlich ist, wenn sie zu einer ihrer echten Teilmengen ($\neq M$) gleichmächtig ist.

Hinweis: Erinnern Sie sich an das Hilbert-Hotel.

(b) Finden Sie eine explizite Bijektion zwischen dem halboffenen Intervall $[0,1[$ und dem abgeschlossenen Intervall $[0,1]$.

(c) Finden Sie eine explizite Bijektion zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q} \cap \,]0,1[$.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*

Geben Sie eine explizite Bijektion zwischen dem Intervall $[0,1[$ sowie dem Quadrat $[0,1[\times[0,1[$ an.

Hinweis: Verwenden Sie die Dezimaldarstellung.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie, dass jede 2×2-Matrix über $\mathbb{C}$ ähnlich zu einer der beiden folgenden Matrizen ist:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}\,.$$

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Zeigen Sie für $n = 2$ und $n = 3$, dass es zu jeder komplexen $n\times n$-Matrix A eine Matrix S gibt, so dass $A + tS$ für jedes hinreichend kleine $t > 0$ diagonalisierbar ist.

Abgabe: Montag, 21. April *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter `http://caj.informatik.uni-jena.de`.