Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Bonusserie 02 - Lösungen

Stilianos Louca

12. August 2008

Aufgabe 01

Konstruktion der Bijektion

Es ist

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) = \left\{\mathcal{G}_v : 0 \neq v \in \mathbb{C}^2\right\} = \underbrace{\left\{\mathcal{G}_{(0,z)} : 0 \neq z \in \mathbb{C}\right\}}_{\left\{\mathcal{G}_{(0,1)}\right\}} \stackrel{+}{\cup} \underbrace{\left\{\mathcal{G}_{(w,z)} : w, z \in \mathbb{C},\ w \neq 0\right\}}_{\left\{\mathcal{G}_{(2,z)} : z \in \mathbb{C}\right\}} = \left\{\mathcal{G}_{(0,1)}\right\} \stackrel{+}{\cup} \left\{\mathcal{G}_{(2,z)} : z \in \mathbb{C}\right\}$$

Sei $\sigma : \underbrace{[(0,\pi) \times [0,2\pi)] \cup [\{0,\pi\} \times \{0\}]}_{K} \to S^2$ die bekannte (bijektive) Polartransformation

$$\sigma(\vartheta, \varphi) := \begin{pmatrix} \cos\vartheta \cos\varphi \\ \cos\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \end{pmatrix}$$

Sei nun $G \in \mathrm{P}(\mathbb{C}^2)$. Wir setzen:

$$f(G) := \begin{cases} \sigma(0,0) & : G = \mathcal{G}_{(0,1)} \\ \sigma(\pi,0) & : G = \mathcal{G}_{(1,0)} \\ \sigma\left(2\operatorname{arccot}\left(\frac{r}{2}\right), \varphi\right) & : G = \mathcal{G}_{(1,re^{i\varphi})}\ ,\ r \neq 0,\ \varphi \in [0,2\pi) \end{cases}$$

wobei $\operatorname{arccot} : (0,\infty) \to \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ sei.

Zeigen: f ist Bijektion

f ist offensichtlich surjektiv, denn für beliebigen Punkt $p := \sigma(\vartheta,\varphi) \in S^2$ ist

$$p = \begin{cases} f\left[\mathcal{G}_{1,2\cot\left(\frac{\vartheta}{2}\right)\cdot e^{i\varphi}}\right] & : \vartheta \in (0,\pi) \\ f\left[\mathcal{G}_{(0,1)}\right] & : \vartheta = 0 \\ f\left[\mathcal{G}_{(1,0)}\right] & : \vartheta = \pi \end{cases}$$

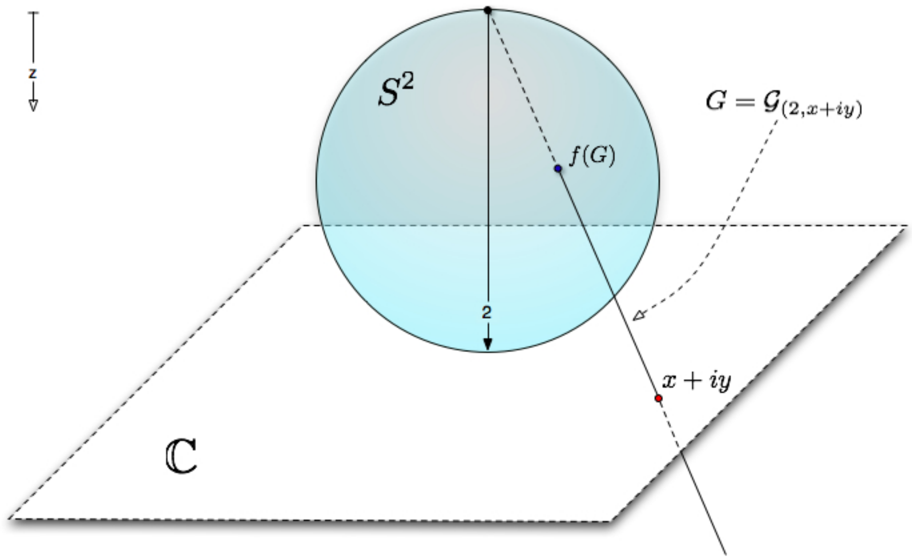
Zum anderen ist f injektiv, denn aus $G_1 \neq G_2 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ folgt:

- Ist $G_1 = \mathcal{G}_{(0,1)}$ so ist $f(G_1) = \mathcal{S}(0,0)$ (oberer Pol) und $G_2 = (1,z),\ z \in \mathbb{C}$ das heißt $f(G_2) = \sigma(\vartheta,\varphi)$ für $\vartheta \neq 0$. Da σ injektiv, ist dann $f(G_2) \neq f(G_1)$.
- Ist $G_1 = \mathcal{G}_{(1,0)}$ und $G_2 = \mathcal{G}_{(1,re^{i\varphi})},\ r \neq 0$ so ist $f(G_1) = \sigma(\pi,0)$ (unterer Pol) und $f(G_2) = \sigma(\underbrace{2\operatorname{arccot}\left(\frac{r}{2}\right)}_{<\pi}, \varphi)$. Wegen Injektivität von σ ist dann $f(G_2) \neq f(G_1)$.
- Alle anderen Fälle sind äquivalent zu den ersten beiden.

Somit ist f eine Bijektion.

Geometrische Interpretation

Für $G = \mathcal{G}_{(2,x+iy)} \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ ist $f(G)$ der eindeutige, nicht-triviale Schnittpunkt der Geraden $\mathcal{G}_{(x,y,2)} \cong (x:y:2) \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ mit der im Punkt $(0,0,1)$ sitzenden Einheitssphäre S^2. Für $G = \mathcal{G}_{(0,1)}$ ist $f(G)$ genau der (durch obere Methode nicht erreichbare) obere Pol von S^2.



(vgl. stereographische Projektion)

Aufgabe 03

Richtung "⇒"

Seien $v_1, .., v_k$ affin unabhängig, das heißt aus

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0 \tag{1}$$

folgt $\lambda_i = 0 \ \ \forall \ i = 1, .., k$ (vgl. Vorlesung). Es sei

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underbrace{\begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_i'} = 0$$

für skalare λ_i. Dann ist insbesondere

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

(vgl. (n+1)-Komponente) und

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0$$

(vgl. 1. bis n. Komponente). Aus Voraussetzung (1) folgt dann $\lambda_i = 0 \ \ \forall \ i = 1, .., k$, das heißt die v_i' sind linear unabhängig.

Richtung "⇐"

Die Vektoren $v_i' := \begin{pmatrix} v_i \\ 1 \end{pmatrix}$ mögen linear unabhängig sein (*) und es sei

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i = 0 \ \wedge \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 0$$

für Skalare λ_i, das heißt

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i' = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \end{pmatrix} = 0$$

Dann müssen wegen (*) die $\lambda_i = 0$ sein, das heißt die v_i sind affin unabhängig.
□

Aufgabe 05

a) Durch die Homogenisierung der 1. Gleichung

$$x =: \frac{x_1}{x_0},\ y =: \frac{x_2}{x_0} \ \rightarrow\ x_1^3 - x_0^2 x_2 = 0$$

ergibt sich durch die lineare, bijektive Transformation $(y_0 : y_1 : y_2) \mapsto (x_2 : x_1 : x_0)$ die äquivalente Bedingung

$$y_1^3 - y_2^2 y_0 = 0$$

Durch Inhomogenisierung $x' := \dfrac{y_1}{y_0},\ y' := \dfrac{y_2}{y_0}$ schließlich

$${x'}^3 = {y'}^2$$

b) **Behauptung:** Die angegebenen Kurven können <u>nicht</u> durch eine Projektivität in einander übergeführt werden.
Beweis: Beginnen analog zu vorhin mit der Homogenisierung

$$(a) : x_1^2 - 5x_2^2 - x_0^2 = 0\ ,\ (b) : 5y_1^2 - y_0^2 = 0$$

und suchen eine lineare, bijektive Transformation $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so dass

$$\underbrace{\left\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 - 5x_2^2 - x_0^2 = 0\right\}}_{X} \overset{!}{=} A \underbrace{\left\{y \in \mathbb{R}^3 : 5y_1^2 - y_0^2 = 0\right\}}_{Y} = \left\{Ay \in \mathbb{R}^3 : 5y_1^2 - y_0^2 = 0\right\}$$

Doch es ist genau dann $y \in Y$ wenn $5y_1 = \pm y_0$, das heißt Y besteht aus den zwei Ebenen $5y_1 = \pm y_0$. Da A insbesondere eine Affinität ist, erhält sie Ebenen, das heißt $X = AY$ muss auch aus zwei Ebenen bestehen. Jedoch ist dies nicht der Fall, denn für festes $x_1 \neq 0$ folgt aus $x \in X$:

$$\frac{x_2^2}{\frac{x_1^2}{5}} + \frac{x_0^2}{x_1^2} = 1$$

das heißt die Koordinaten (x_0, x_2) beschreiben auf dem affinen Unterraum $x_1 = \text{const}$ eine Ellipse mit Halbachsenlängen $|x_1|$ und $\frac{|x_1|}{\sqrt{5}}$. X ist also eine Paraboloid-förmige Fläche in $\mathbb{R}^3$.