2. Bonusserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 (*3 Punkte*)

Finden Sie eine explizite Bijektion $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \to S^2$.

Hinweis: Verwenden Sie homogene Koordinaten für den projektiven Raum und Polarkoordinaten für die Sphäre.

Aufgabe 2 (*4 Punkte*)

Es sei A eine komplexe $n \times n$-Matrix, deren Minimalpolynom gleich ihrem charakteristischen Polynom ist. Weiterhin sei S eine antisymmetrische komplexe $n \times n$-Matrix. Beweisen Sie, dass AS nur dann symmetrisch ist, wenn $S = 0$. (Sie dürfen der Einfachheit halber nur $n \leq 4$ betrachten.)

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass man A in Jordan-Normalform annehmen kann.

Aufgabe 3 (*1 Punkt*)

Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n$ genau dann affin unabhängig sind, wenn die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \ldots, \left(\begin{smallmatrix} v_k \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{n+1}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 4 (*4 Punkte*)

Bestimmen Sie eine Projektivität der Ebene, die den Kegelschnitt

$$x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 2x - 2\sqrt{3}\,y = 0$$

in den Einheitskreis überführt.

Aufgabe 5 (*2+2 Punkte*)

Entscheiden Sie in den folgenden Fällen, ob die beiden angegebenen Kurven durch eine Projektivität ineinander überführt werden können und geben Sie diese gegebenenfalls an:

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3 = y\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^3 = y^2\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 = 5y^2 + 1\}$ und $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 5x^2 = 1\}$

Abgabe: Montag, 14. Juli *vor* der Vorlesung. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter `http://caj.informatik.uni-jena.de`.