Lineare Algebra II

FSU Jena - SS 2008

Bonusserie 01 - Lösungen

Stilianos Louca

19. Juni 2008

Aufgabe 01

Betrachten die Zahl

$$x := \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

Wegen $5\sqrt{2} - 7 > 0$ ist schonmal $x \in \mathbb{R}$. Außerdem gilt:

$$x^3 = (5\sqrt{2}+7) - 3\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{2}{3}}\left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{1}{3}} + 3\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{1}{3}}\left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{2}{3}} - (5\sqrt{2}-7)$$

$$= 14 - 3\underbrace{\left(5\sqrt{2}+7\right)^{\frac{1}{3}}\left(5\sqrt{2}-7\right)^{\frac{1}{3}}}_{\left[(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)\right]^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1}}\underbrace{\left[\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\right]}_{x} = 14 - 3x$$

$$\rightarrow\ 0 = x^3 + 3x - 14 = (x-2)(x^2+2x+7)$$

Doch da $x^2 + 2x + 7 = 0$ keine reellen Lösungen hat (PQ-Formel) ist $x = 2$ die einzige Möglichkeit. Wegen $2 \in \mathbb{N}$ ist somit x konstruierbar.
Betrachten nun die Zahl

$$y := \sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$$

Genau die gleiche Rechnung wie vorhin, führt auf die Gleichung

$$y^3 = 3y + 10\sqrt{2}\ \rightarrow\ 0 = y^3 - 3y - 10\sqrt{2} = \left(y - 2\sqrt{2}\right)\left(y^2 + 2\sqrt{2}y + 5\right)$$

Doch die Gleichung $y^2 + 2\sqrt{2}y + 5 = 0$ hat keine reellen Lösungen (PQ-Formel), so dass notwendigerweise $y = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ sein muss. Doch $8 \in \mathbb{Q}$ und somit auch $y = \sqrt{8}$ sind konstruierbar.

Aufgabe 02

a) Setzen $v_k^1 := x_k,\ v_k^2 := x_{k+1},\ k = 0, 1, ...,$ so dass gilt:

$$v_{k+1}^1 = x_{k+1} = v_k^2 \quad , \quad v_{k+1}^2 = x_{k+2} = x_{k+1} + 2x_k = v_k^2 + 2v_k^1$$

In Matrixschreibweise also

$$\vec{v}_{k+1} := \begin{pmatrix} v_{k+1}^1 \\ v_{k+1}^2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \begin{pmatrix} v_k^1 \\ v_k^2 \end{pmatrix} = A \cdot \vec{v}_k\ ,\ \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Die Eigenwerte von A ergeben sich als $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ so dass sich A durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf die Diagonalform

$$D = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

bringen lässt. Somit ist

$$v_n = A^n v_0 = \left(TDT^{-1}\right)^n v_0 = TD^nT^{-1}v_0 = T\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}T^{-1}v_0$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(-1)^n + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^n \\ 2(-1)^{n+1} + 2^{n+1} & (-1)^n + 2^{n+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-1)^n + 2^{n+1} \\ 2^{n+2} + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

also

$$x_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}\cdot(-1)^n$$

Eingesetzt ergibt demnach

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3}\cdot 2^{n+1} + \frac{1}{3}(-1)^{n+1}}{\frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}(-1)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}} = 2$$

Variante 1

Lösen die Differenzengleichung durch den Ansatz $x_n = b\cdot a^n$:

$$x_{n+2} = b\cdot a^{n+2} \overset{!}{=} b\cdot a^{n+1} + 2b\cdot a^n \ \rightarrow\ a^2 = a+2 \ \rightarrow\ a_{1,2}\in\{-1,2\}$$

Allgemeine Lösung: $x_n = b_1\cdot 2^n + b_2\cdot(-1)^n$

Anfangswerte: $x_0 = x_1 \overset{!}{=} 1 \ \rightsquigarrow\ b_1 = \frac{2}{3}\ ,\ b_2 = \frac{1}{3}$

und erhalten so

$$\boxed{x_n = \frac{2}{3}\cdot 2^n + \frac{1}{3}\cdot(-1)^n}$$

Durch direktes einsetzen in die Differenzengleichung bestätigt sich das Ergebnis! Analog zu vorhin ist also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$$

Variante 2

Setzen

$$a_n := \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Offensichtlich ist x_n monoton wachsend, das heißt

$$a_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = 1 + 2\underbrace{\frac{x_{n-1}}{x_n}}_{\in(0,1)} = 1 + \frac{2}{a_{n-1}} \in (1,3)$$

Somit sind die a_n beschränkt innerhalb des Intervalls $(1,3)$. Dann ist

$$|a_{n+1}-2| = \left|\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} - 2\right| = \left|\frac{x_{n+2}-2x_{n+1}}{x_{n+1}}\right| = \left|\frac{x_{n+1}+2x_n-2x_{n+1}}{x_{n+1}}\right| = \underbrace{\left|\frac{2x_n - x_{n+1}}{x_n}\right|}_{|a_n-2|} \cdot \frac{x_n}{x_{n+1}} = |a_n-2| \cdot \frac{1}{a_n}$$

$$= |a_n-2| \cdot \frac{1}{\underbrace{1+\underbrace{\frac{2}{\underbrace{a_{n-1}}_{}}}_{\in\left(\frac{2}{3},2\right)}}_{\in\left(\frac{1}{3},\frac{3}{5}\right)}} < |a_n-2| \cdot \frac{3}{5}$$

$$\rightarrow \text{ Für festes } n_0\text{:} \quad |a_{n_0+N}-2| < |a_{n_0}-2| \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

das heißt $a_n \to 2$.

Variante 3

Unter der Annahme das $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ existiert und endlich ist, muss gelten

$$\xi := \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 2x_{n-1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{\frac{x_n}{x_{n-1}}}\right) = 1 + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}} \stackrel{!}{=} 1 + \frac{2}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}} = 1+\frac{2}{\xi}$$

$$\rightarrow \ \xi^2 - \xi - 2 \stackrel{!}{=} 0 \ \xrightarrow{\xi>0} \ \xi = 2$$

Aufgabe 03

a) Da N Nilpotent ist, kann der entsprechende Vektorraum $\mathbb{K}^n$ als direkte Summe zyklischer Unterräume $U_1,..,U_m$ geschrieben werden, das heißt für jeden dieser Unterräume existiert ein $v_i \in \mathbb{K}^n$ so dass $v_i, Nv_i, .., N^{\dim(U_i)-1}v_i$ eine Basis von U_i bilden. Fassen wir die gesamten Basen aller U_i als eine Basis zusammen, so hat N bzgl. dieser Basis Diagonal-Blockgestalt, wobei jeder $\dim(U_i) \times \dim(U_i)$ Block nur aus "1" in der 1. oberen Nebendiagonale besteht (vgl. Konstruktion der Jordan Normalform). Somit ist ersichtlich dass die Spur der Matrix bzgl. dieser Basis identisch 0 ist. Doch bekanntlich ist die Spur einer Matrix (sprich, Endomorphismus) Basiswechsel-invariant, das heißt $\operatorname{trace}(N) = 0$. $\square$

b) Da N Nilpotent ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $N^m \neq 0$. Machen den **Ansatz** (hinsichtlich der aus der Analysis bekannten Eigenschaft für beschränkte Operatoren in Banach-Räumen)

$$(\mathrm{Id} - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} N^k$$

und machen die Probe:

$$(\mathrm{Id} - N) \cdot \sum_{k=0}^{m-1} N^k = \sum_{k=0}^{m-1} \underbrace{\mathrm{Id} \cdot N^k}_{N^k} - \sum_{k=1}^{m} N^k = N^0 - \underbrace{N^m}_{0} = \mathrm{Id}$$

Bekanntlich gilt für quadratische Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$: Es ist $AB = \mathrm{Id}$ genau dann wenn A invertierbar ist und $B = A^{-1}$, denn:

$$\det(A)\cdot\det(B) = \det(AB) = \det(\mathrm{Id}) = 1 \ \rightarrow \ \det(A) \neq 0 \ \rightarrow \ A \text{ invertierbar}$$

$$\rightarrow \ B = \mathrm{Id}\, B = \left(A^{-1}A\right) B = A^{-1}(AB) = A^{-1}\,\mathrm{Id} = A^{-1}$$

Somit ist auch $(\mathrm{Id}-N)$ invertierbar, und es ist

$$\sum_{k=0}^{m-1} N^k = (\mathrm{Id}-N)^{-1} \quad \square$$

Aufgabe 04

Aus Übungsserie 06 ist bekannt: $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ ist tatsächlich eine Gruppe bzgl. der Hintereinanderausführung von Affinitäten auf einem affinen Raum $\mathscr{A}$ über $\mathbb{R}^n$ ist. Es sei $a_0 \in \mathscr{A}$ fest, dann ist jede Affinität F über $\mathscr{A}$ gegeben durch

$$F(a) = F(a_0) + f(\overline{a_0 a}) = (a_0 + \vec{F}_0) + f(\overline{a_0 a}) \quad \forall\, a \in \mathscr{A}\ ,\ \text{mit } f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$$

Dabei sei $\hat{f} \in M_n(\mathbb{R})$ die (invertierbare) Matrix von f bzgl. der Standardbasis, und

$$\vec{F}_0 := \begin{pmatrix} F_0^1 \\ \vdots \\ F_0^n \end{pmatrix} := \overline{a_0 F(a_0)} \in \mathbb{R}^n$$

Definieren die Abbildung $\Phi : \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$, die jeder Affinität $F \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$ eine invertierbare Matrix $\Phi(F) \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ (und somit einen Endomorphismus in $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$) zuordnet, gemäß

$$\Phi(F) = \begin{pmatrix} \hat{f} & \vec{F}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} & F_0^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} & F_0^n \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften:

(i) Φ ist wohldefiniert, denn zu jeder Affinität ist (zu festem a_0) der Isomorphismus f, und somit auch seine Matrix, sowie der Punkt $F(a_0)$ eindeutig.

(ii) $\Phi(F)$ ist tatsächlich invertierbar (als Matrix, und somit auch als Endomorphismus), denn

$$\det(\Phi(F)) \overset{\text{Leipnitz}}{=} 1 \cdot \det(\hat{f}) \overset{f \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)}{\neq} 0$$

Somit ist $\Phi(F) \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$.
Bemerke: Zwar schreiben wir $\Phi(F)$ als $(n+1) \times (n+1)$ Matrix, doch ist diese äquivalent zum durch ihr induzierten Endomorphismus.

(iii) Φ ist ein Gruppenhomomorphismus, denn für Affinitäten F, G ist

$$G \circ F(a) = G(F(a_0) + f(\overline{a_0 a})) = G(a_0) + g\left[\overline{a_0\,(F(a_0) + f(\overline{a_0 a}))}\right] = G(a_0) + g\left[\overline{a_0 F(a_0)} + f(\overline{a_0 a})\right]$$

$$= G(a_0) + g\left(\overline{a_0 F(a_0)}\right) + g(f(\overline{a_0 a})) = \underbrace{G(a_0) + g(\vec{F}_0)}_{(G\circ F)(a_0)} + (g \circ f)(\overline{a_0 a}) = \underbrace{(GF)(a_0)}_{=: a_0 + (\overrightarrow{GF})_0} + (gf)(\overline{a_0 a})$$

$$\text{mit} \quad (\overrightarrow{GF})_0 = \overline{a_0 (GF)(a_0)} = \overline{a_0\left(G(a_0) + g(\vec{F}_0)\right)} = \overline{a_0 G(a_0)} + g(\vec{F}_0) = \vec{G}_0 + g(\vec{F}_0)$$

das heißt

$$\Phi(GF) = \begin{pmatrix} \hat{gf} & (\overrightarrow{GF})_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{g} \cdot \hat{f} & (\overrightarrow{GF})_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Doch außerdem ist

$$\Phi(G) \cdot \Phi(F) = \begin{pmatrix} \hat{g} & \vec{G}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f} & \vec{F}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{g} \cdot \hat{f} & \hat{g} \cdot \vec{F}_0 + \vec{G}_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\hat{g}\cdot\vec{F}_0 = g(\vec{F}_0)}{=} \begin{pmatrix} \hat{g} \cdot \hat{f} & (\overrightarrow{GF})_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das heißt $\Phi(G) \cdot \Phi(F) = \Phi(GF)$.

(iv) Φ ist injektiv, denn für $G \neq F$ ist

$$f \neq g \ \vee \ F(a_0) \neq G(a_0) \ \rightarrow \ \hat{f} \neq \hat{g} \ \vee \ \vec{F}_0 \neq \vec{G}_0$$

und somit natürlich, per Konstruktion $\Phi(F) \neq \Phi(G)$.

Aufgabe 05

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, $B \subset \mathbb{R}^n$ beliebig und $\lambda \in \mathbb{R}$.

Zeigen: λA ist offen

Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial, da $\lambda A = \emptyset$ und die leere Menge offen ist. Der Fall $\lambda = 0$ ist ausgeschlossen, denn $\{0\} = 0 \cdot A$ ist abgeschlossen!
Sei also $\lambda \neq 0$ und $A \neq \emptyset$. Dann existiert zu jedem $x \in A$ ein $\varepsilon_x > 0$ so dass

$$B_{\varepsilon_x}(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq \varepsilon\} \subset A$$

ist. Sei nun $x \in \lambda A$ beliebig, das heißt $x = \lambda x',\ x' \in A$ und $\varepsilon := |\lambda|\, \varepsilon_{x'}$. Dann gilt für $y \in B_\varepsilon(x)$:

$$\left\| \frac{y}{\lambda} - x' \right\| = \frac{1}{|\lambda|} \|y - \lambda x'\| = \frac{1}{|\lambda|} \cdot \underbrace{\|y - x\|}_{\leq \varepsilon} \leq \frac{\varepsilon}{\lambda} = \varepsilon_x$$

das heißt $\dfrac{y}{\lambda} \in B_{\varepsilon_{x'}}(x') \subset A$, also $y = \lambda \cdot \dfrac{y}{\lambda} \in \lambda A$. Somit ist

$$B_\varepsilon(x) \subset \lambda A$$

also A offen.

Zeigen: $A + B$ ist offen

a) Der Fall $A = \emptyset$ ist trivial, denn $A + B = \emptyset$ ist offen. Analog ist auch der Fall $B = \emptyset$ trivial. Es sei also $A, B \neq \emptyset$ und $x \in A + B$ beliebig, das heißt $x = a + b,\ a \in A, b \in B$. Dann gilt für beliebiges $y \in B_{\varepsilon_a}(x)$:

$$\|(y - b) - a\| = \|(y - b) + b - a - b\| = \|y - (a + b)\| = \|y - x\| \leq \varepsilon_a$$

das heißt $(y - b) \in B_{\varepsilon_a}(a) \subset A$ also $y = (y - b) + b \in A + B$. Somit ist $B_{\varepsilon_a}(x) \subset A + B$, das heißt $A + B$ ist offen.

b) **Beispiel** Es sei $A = \{0\}$ (abgeschlossen) und

$$B := B_1^o(0) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - 0\| < 1\}$$

Dann ist $A + B = B$. Bekanntlich ist $B_1^o(0)$ <u>nicht</u> abgeschlossen, da $\partial B_1^o(0) \not\subset B_1^o(0)$.