1. Bonusserie zur Vorlesung „Lineare Algebra und Analytische Geometrie II“

Sommersemester 2008, Prof. V. Matveev

Aufgabe 1 *(2 Punkte)*

Sind die Zahlen $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ und $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} + \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ konstruierbar?

Aufgabe 2 *(1+3 Punkte)*

Die Folge (x_n) sei durch die Rekursionsbeziehung $x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n$ mit $x_0 = x_1 = 1$ gegeben.

(a) Schreiben Sie diese Beziehung in Matrixform.

(b) Berechnen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Aufgabe 3 *(1+3 Punkte)*

Es sei N eine nilpotente Matrix.

(a) Zeigen Sie $\operatorname{tr} N = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass $(\mathrm{Id} - N)$ invertierbar ist und berechnen Sie $(\mathrm{Id} - N)^{-1}$ als Linearkombination der Potenzen von N.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*

Finden Sie einen injektiven Gruppenhomomorphismus $\mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Aufgabe 5 *(2+2 Punkte)*

(a) Beweisen Sie, dass für eine offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine beliebige Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ die Mengen

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{R}^n : a \in A, b \in B\} \qquad \text{und} \qquad \lambda A := \{\lambda a \in \mathbb{R}^n : a \in A\}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder offen sind.

(b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass für eine abgeschlossene Menge A die Menge $A + B$ nicht abgeschlossen sein muss.

Abgabe: Montag, 16. Juni *vor* der Probeklausur. Bitte beschriften Sie Ihre Lösungen mit Name und Matrikelnummer.

Diese Übungsblätter sowie die Bewertungen Ihrer Lösungen finden Sie im Netz unter `http://caj.informatik.uni-jena.de`.