Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 13 - Lösungen

Stilianos Louca

13. April 2008

Aufgabe 01

Es ist

$$f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b} + \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{S} \cdot x = b + Sx$$

$$f^{-1}(x) = S^{-1}(x-b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}(x-b) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\tilde{b}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{S}} \cdot x$$

$$Q = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : q(x) + \varphi(x) + c = 0 \right\} : q(x) = x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 \ , \ \varphi = -(e_2)^* + 3(e_3)^* \ , \ c = -2$$

Somit ist das Bild

$$f(Q) = \{f(v) \mid v \in Q\} = \left\{ v \mid f^{-1}(v) \in Q \right\} = \left\{ v \mid \left(\tilde{b} + \tilde{S} \cdot v \right) \in Q \right\}$$

$$= \{ v \mid (v_1 - 2v_3 - 1, -v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_3 - 2) \in Q \}$$

$$= \left\{ v \mid 2v_1^2 - v_2^2 + 7v_3^2 - 8v_1v_3 + 2v_1v_2 - 2v_2v_3 - 4v_1 - v_2 + 10v_3 - 3 = 0 \right\}$$

auch eine Quadrik.

Aufgabe 03

a) Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.
Reflexivität: $x = 1 \cdot x \ \rightarrow \ x \sim x$.
Symmetrie: Ist $x \sim y$ d.h $y = \lambda x$, so ist $\lambda \neq 0$ und somit $x = \frac{1}{\lambda} y$ also $y \sim x$.
Transitivität: Ist $x \sim y$ und $y \sim z$, d.h

$$y = \lambda x, z = \mu y$$

Dann ist $z = \lambda \mu x$ also $x \sim z$. Somit erfüllt $\sim$ alle Bedingungen an eine Äquivalenzrelation. $\square$
Bezeichnen: $[x] := (x_0 : x_1 : x_2)$ die Äquivalenzklasse von x.

b) Betrachten die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3) \ , \ (x_1, x_2) \overset{\Phi}{\mapsto} (1 : x_1 : x_2)$$

Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $\Phi(x) = \Phi(y)$. Dann ist

$$(1 : x_1 : x_2) = (1 : y_1 : y_2) \;\rightarrow\; (1, x_1, x_2) \sim (1, y_1, y_2) \;\rightarrow\; \exists\, \lambda : (1, y_1, y_2) = \lambda(1, x_1, x_2)$$

Es ist sogar: $1 = \lambda \cdot 1 \;\rightarrow \lambda = 1 \;\rightarrow\; (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

Somit ist Φ injektiv. $\square$
Sei nun $z = (z_1 : z_2 : z_3) \in P(\mathbb{R}^3)$. Sei zunächst $z \in \operatorname{image}\Phi$, d.h

$$(z_1 : z_2 : z_3) = (1 : x_1 : x_2) \text{ für irgendein } x \in \mathbb{R}^2$$

Dann muss

$$(z_1, z_2, z_3) \sim (1, x_1, x_2) \;\rightarrow\; 1 = \lambda z_1 \;\rightarrow\; z_1 \neq 0$$

sein. Sei nun andersrum, $z_1 \neq 0$. Dann ist

$$\Phi\left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right) = \left(1 : \frac{z_2}{z_1} : \frac{z_3}{z_1}\right) = (z_1 : z_2 : z_3) \;\text{ denn }\; z = z_1 \cdot \left(1, \frac{z_2}{z_1}, \frac{z_3}{z_1}\right)$$

also $z \in \operatorname{image}\Phi$. Somit gilt die Äquivalenz

$$z \in \operatorname{image}\Phi \;\Leftrightarrow\; z_1 \neq 0$$

c) Die Aussage $[x] = [y]$ ist äquivalent zur Aussage $x \sim y$. Suchen also zwei $x \sim y,\; y = \lambda x$ mit $f(x) \neq f(y)$. Also

$$f(x) = x_1^2 - x_0 x_2 \neq f(\lambda x) = \lambda^2(x_1^2 - x_0 x_2)$$

Setzen einfach $x = (0, 1, 0)$ und $y = (0, 2, 0)$. Dann ist

$$x \sim y \;\wedge\; f(x) = 1 \neq 4 = f(y)$$

d) Seien $v, w \in (x_0 : x_1 : x_2)$, d.h $v \sim w,\; w = \lambda v$. Dann gilt: Ist $f(v) = 0$ dann ist auch

$$f(w) = f(\lambda v) = \lambda^2 f(v) = 0$$

Andernfalls, ist $f(v) \neq 0$, dann ist auch $f(w) \neq 0$.
Somit kann man eine Äquivalenzklasse als Nullstelle von f bezeichnen, da entweder alle oder keines der Elemente in dieser die Abbildung f Annullieren.
Dies ist jedoch anders bei der Abbildung $g(x) = x_1^2 - x_2$, denn für $v := (0, 1, 1)$ und $w := (0, 2, 2)$ ist zwar $g(v) = 0$ und $v \sim w$, jedoch $g(w) = 2 \neq 0$.

e) Betrachten die Funktionen

$$f(x) = x_1^2 - x_0 x_2 \;,\; g(x) = x_0 x_1^2 - x_0^2 x_2 = x_0 \cdot f(x)$$

Bemerke: Für beide macht es Sinn Äquivalenzklassen als Nullstellen zu bezeichnen (Beweis für g analog zu vorhin).
Sei nun $[x] \in C$, d.h

$$f(x) = x_1^2 - x_0 x_2 = 0$$

Dann ist natürlich auch

$$g(x) = x_0 \cdot f(x) = 0 \;\rightarrow\; [x] \in C'$$

und somit $C \subseteq C'$. Außerdem gilt für $x := (0, 1, 0)$

$$f(x) = 1 \neq 0 \;\wedge\; g(x) = 0 \;\rightarrow\; x \in C' \;\wedge\; x \notin C$$

so dass $C \neq C'$ ist. $\square$
Somit ist $C' \setminus C \neq \{\}$. Sei also $v \in C' \setminus C$. Dann ist:

$$f(x) \neq 0 \;\wedge\; g(x) = x_0 \cdot f(x) = 0$$

$$\Rightarrow\; x_0 = 0 \;\wedge\; x_1 \neq 0$$

Andersrum: Sei $x_0 = 0,\; x_1 \neq 0$. Dann ist

$$f(x) = x_1^2 \neq 0 \;,\; g(x) = x_0 \cdot f(x) = 0$$

also $x \in C' \setminus C$. Somit ist

$$\boxed{C' \setminus C = \{x \mid x_0 = 0 \neq x_1\}}$$

Sei $x_0 \neq 0$ fest. Betrachten die Menge

$$R = \big\{[v] \in P(\mathbb{R}^3) \mid v_0 = x_0\big\}$$

Sei nun $[v] \in R \cap C$. Dann ist wegen $C \subset C'$ auch $[v] \in R \cap C'$, d.h

$$R \cap C \subset R \cap C'$$

Sei andersrum $[v] \in C' \cap R$. Dann ist $v_0 = x_0 \neq 0$ also folgt wegen $0 = g(v) = v_0 \cdot f(v)$ dass auch $f(v) = 0$ sein muss. Somit ist

$$C' \cap R \subset C \cap R$$

und schließlich

$$C' \cap R = C \cap R$$