Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 13

Abgabe am Do 12.07. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (4 P.) Bestimmen Sie das Bild der Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch $x^2 - y^2 + 2xz - y + 3z - 2 = 0$ unter der Affinität $f(x, y, z) = (3 - x + 2z, 2 + y + z, 1 - x + z)$.

Aufgabe 2: (6 P.) Bringen Sie die Quadrik $Q \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben durch $x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_4 - x_3x_4 + x_1 = 0$ auf einer der Standardformen. Beschreiben Sie außerdem eine Affinität, die Q auf Standardform bringt.

Aufgabe 3: Auf der Menge $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ definieren wir eine Relation $\sim$ so: es ist $(x_0, x_1, x_2) \sim (y_0, y_1, y_2)$, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt derart, dass $y_i = \lambda x_i$ für $i = 0, 1, 2$.

a) (1 P.) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ ist.

Wir bezeichnen mit $(x_0 : x_1 : x_2)$ die Äquivalenzklasse von (x_0, x_1, x_2). Die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnet man als der 2-dimensionale projektive Raum $P(\mathbb{R}^3)$.

b) (2 P.) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\mathbb{R}^2 \to P(\mathbb{R}^3)$, $(x_1, x_2) \mapsto (1 : x_1 : x_2)$ injektiv ist. Beschreiben Sie alle Elemente von $P(\mathbb{R}^3)$, die *nicht* im Bild liegen.

c) (1 P.) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung $f(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_0x_2$. Finden Sie (x_0, x_1, x_2), (y_0, y_1, y_2) derart, dass $(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$ aber $f(x_0, x_1, x_2) \neq f(y_0, y_1, y_2)$.

d) (2 P.) Erklären Sie, warum die Aussage

$$(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3) \text{ ist eine Nullstelle der Abbildung } f(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_0x_2$$

trotzdem Sinn macht, die Aussage „$(x_0 : x_1 : x_2) \in P(\mathbb{R}^3)$ ist eine Nullstelle der Abbildung $f(x_0, x_1, x_2) = x_1^2 - x_2$“ dagegen nicht.

e) (3 BP.) Sei $C \subseteq P(\mathbb{R}^3)$ bzw. $C' \subseteq P(\mathbb{R}^3)$ die Nullstellenmenge von $x_1^2 - x_0x_2$ bzw. $x_0x_1^2 - x_0^2x_2$. Zeigen Sie, dass C eine echte Teilmenge von C' ist. Beschreiben Sie alle Elemente von $C' \setminus C$. Zeigen Sie, dass C, C' den gleichen Schnitt mit dem *affinen Teilstück* $x_0 \neq 0$ haben. (Vgl. Teil b) oben.)

Aufgabe 4: (4 BP.) Finden Sie orthogonale Matrizen S, T und eine Diagonalmatrix D derart, dass $SDT = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt.

Aufgabe 5: (5 BP.) Konstruieren Sie eine triangulierbare Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$ derart, dass Ihr(e) Übungsgruppenleiter(in) die Jordansche Normalform nicht durch bloßes hingucken ablesen kann. Geben Sie auf ein anderes Blatt die Jordansche Normalform einschl. deren Herleitung an.

Um die volle Punktzahl zu erhalten, darf der/die Übungsleiter(in) *nichts* über die Jordansche Form ablesen können. Bitte keinen *unfairen* Gebrauch des Rechners.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16