Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 12 - Lösungen

Stilianos Louca

12. April 2008

Aufgabe 01

a) Es ist klar dass b bilinear ist, denn

$$b(\lambda x+\mu y,z)=(\lambda x+\mu y)^{\perp}\cdot A\cdot z=\left(\lambda x^{\perp}+\mu y^{\perp}\right)\cdot A\cdot z=\lambda x^{\perp}Az+\mu y^{\perp}Az=\lambda b(x,z)+\mu b(y,z)$$

$$b(x,\lambda y+\mu z)=x^{\perp}A(\lambda y+\mu z)=\lambda x^{\perp}Ay+\mu x^{\perp}Az=\lambda b(x,y)+\mu b(x,z)$$

Ferner ist für beliebiges $x\in\mathbb{R}^n$:

$$b(x,x)=x^{\perp}Ax=\sum_{i,j}x^iA^i_jx^j=-\sum_{i,j}x^i\left(A^i_j\right)^{\perp}=-\sum_{i,j}x^iA^j_ix^j=-x^{\perp}Ax=-b(x,x)\ \rightarrow\ b(x,x)=0$$

d.h b ist alternierend.

b) Sei $0\neq\lambda$ ein Eigenwert von A. Dann gibt es ein $0\neq v\in\mathbb{R}^n$ mit $Av=\lambda v$. Doch somit folgt

$$0=v^{\perp}Av=\lambda v^{\perp}v=\lambda\left\langle v,v\right\rangle$$

was ein Widerspruch ist, da das Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ positiv definit ist! Somit hat A keine Eigenwerte $\lambda\neq 0$.

c) Aus Teil (b) folgt

$$\dim\operatorname{kernel}(I-A)=0\ ,\ \dim\operatorname{kernel}(I+A)=0$$

Somit sind die Matrizen $(I-A),(I+A)$ und ferner $(I+A)(I-A)^{-1}$ invertierbar. Es gilt

$$(I+A)(I-A)^{-1}\cdot\left[(I+A)(I-A)^{-1}\right]^T=(I+A)(I-A)^{-1}(I+A)^T\left[(I-A)^{-1}\right]^T$$

$$=(I+A)(I-A)^{-1}(I+A)^T\left[(I-A)^T\right]^{-1}=(I+A)(I-A)^{-1}(I+A^T)(I-A^T)^{-1}$$

$$=(I+A)(I-A)^{-1}(I-A)(I+A)^{-1}=I$$

$$\rightarrow\ \left[(I+A)(I-A)^{-1}\right]^T=\left[(I+A)(I-A)^{-1}\right]^{-1}$$

Doch aus der Linearen Algebra 1 wissen wir, Q ist genau dann orthogonal, wenn $Q^T=Q^{-1}$ ist. $\square$

Aufgabe 02

a) Da Standardskalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, definiert als

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$$

ist selbst auch eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$. Sesquilinearität folgt unmittelbar aus der Sesquilinearität des Standardskalarprodukts:

$$b(\lambda x + \mu y, z) = \langle A(\lambda x + \mu y), Az\rangle = \langle \lambda Ax + \mu Ay, Az\rangle = \lambda \langle Ax, Az\rangle + \mu \langle Ay, Az\rangle = \lambda b(x,z) + \mu b(y,z)$$

$$b(x, \lambda y + \mu z) = \langle Ax, \lambda Ay + \mu Az\rangle = \overline{\lambda} \langle Ax, Ay\rangle + \overline{\mu} \langle Ax, Az\rangle = \overline{\lambda} b(x,y) + \overline{\mu} b(x,z)$$

Ferner folg aus der Antisymmetrie des Standardskalarprodukts

$$b(x,y) = \langle Ax, Ay\rangle = \overline{\langle Ay, Ax\rangle} = \overline{b(y,x)}$$

Somit ist b eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$. $\square$

b) Es ist

$$b(e_1, e_1) = \langle Ae_1, Ae_1\rangle = \sum_{i=1}^{2} A_1^i \overline{A}_1^i = 1$$

so dass wir setzen $x_1 := e_1$. Es ist

$$\operatorname{span}\{x_1\}^\perp = \operatorname{kernel} b(\cdot, x_1) = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} b(e_1,x_1) & b(e_2,x_1) \end{pmatrix} = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(1+i, -1)\}$$

so dass wir setzen $x_2 := (1+i, -1)$. Bzgl. der Basis x_1, x_2 wirkt b als die Matrix

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 03

Sei $b : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ eine positiv definite hermitsche Form auf $\mathbb{C}^2$. Suchen eine obere Dreiecksmatrix Matrix $A \in M_2(\mathbb{C})$ so dass gilt:

$$b(z,w) = \langle Az, Aw\rangle$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Insbesondere muss

$$0 < b(e_1,e_1) \overset{!}{=} \langle Ae_1, Ae_1\rangle = A_1^1\overline{A_1^1} + \underbrace{A_1^2\overline{A_1^2}}_{0} = \left|A_1^1\right|^2$$

gelten. Setzen

$$A_1^1 := \sqrt{b(e_1,e_1)} > 0$$

so dass automatisch obere Bedingung erfüllt ist. Analog muss

$$b(e_1,e_2) \overset{!}{=} \langle Ae_1, Ae_2\rangle = A_1^1\overline{A_2^1}$$

gelten. Setzen also

$$A_2^1 := \overline{\frac{b(e_1,e_2)}{A_1^1}} = \overline{\frac{b(e_1,e_2)}{\sqrt{b(e_1,e_1)}}}$$

so dass auch diese Bedingung erfüllt ist. Ebenso muss

$$0 < b(e_2,e_2) \overset{!}{=} \langle Ae_2, Ae_2\rangle = A_2^1\overline{A_2^1} + A_2^2\overline{A_2^2} = \frac{|b(e_1,e_2)|^2}{b(e_1,e_1)} + \left|A_2^2\right|^2$$

gelten. Da b positiv definit ist, ist

$$\det(b_{ij}) = b(e_1,e_1)b(e_2,e_2) - b(e_1,e_2)b(e_2,e_1) = b(e_1,e_1)b(e_2,e_2) - |b(e_1,e_2)|^2 > 0$$

also

$$b(e_2,e_2) - \frac{|b(e_1,e_2)|^2}{b(e_1,e_1)} > 0$$

Setzen somit

$$A_2^2 := \sqrt{b(e_2,e_2) - \frac{|b(e_1,e_2)|^2}{b(e_1,e_1)}}$$

so dass auch letztere Bedingung erfüllt ist.
Allgemein gilt: sind b, c zwei sesquilineare Formen auf $\mathbb{C}^n$, deren Matrizen bzgl. einer Basis $x_1, .., x_n$ übereinstimmen, d.h

$$b(x_i, x_j) = c(x_i, x_j) \; \forall \; i, j$$

so ist $b = c$, denn

$$b(z,w) = z^i \overline{w^j} b(x_i,x_j) = z^i \overline{w^j} c(x_i,x_j) = c(z,w)$$

Somit sind die Sesquilinearformen b und $c(z,w) := \langle Az, Aw\rangle$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{b(e_1,e_1)} & \overline{\frac{b(e_1,e_2)}{\sqrt{b(e_1,e_1)}}} \\ \\ 0 & \sqrt{b(e_2,e_2) - \frac{|b(e_1,e_2)|^2}{b(e_1,e_1)}} \end{pmatrix}$$

identisch. $\square$

Aufgabe 04

Seien $\lambda_0, .., \lambda_d \in \mathbb{K}$ und $\mu_0, .., \mu_d \in \mathbb{K}$ zwei Systeme, derart dass

$$\sum_{i=0}^{d} \lambda_i = \sum_{i=0}^{d} \mu_i = 1$$

und

$$v = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i v_i = \sum_{i=0} \mu_i v_i = v$$

gilt. Dann ist umgestellt

$$\sum_{i=0}^{d} (\lambda_i - \mu_i) = 0 \;\wedge\; \sum_{i=0}^{d} (\lambda_i - \mu_i) v_i = 0$$

was aufgrund der affinen Unabhängigkeit der $v_0, .., v_d$ bedeutet, dass $\lambda_i - \mu_i = 0$ ist. Somit sind die beiden Systeme identisch. $\square$

Aufgabe 05

Es ist

$$V = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 2 - x_2 + x_3\right\} = \{(2,0,0) + x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = -x_2 + x_3\}$$

$$= \{\underbrace{(2,0,0)}_{a} + x \in \mathbb{R}^3 : x \in \underbrace{\operatorname{span}\{(-1,1,0),\ (1,0,1)\}}_{=:\,U}\} = a + U$$

$$W = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = 1 + x_3 - 2x_4,\ x_2 = 2 + 2x_3 - 3x_4\right\} = \{(1,2,0) + x \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3 - 2x_4,\ x_2 = 2x_3 - 3x_4\}$$

$$= \{\underbrace{(1,2,0)}_{b} + x \in \mathbb{R}^4 : x \in \underbrace{\operatorname{span}\{(1,2,1,0),\ (-2,-3,0,1)\}}_{=:\,Q}\} = b + Q$$

Suchen einen beliebigen Isomorphismus $F : U \to Q$. Dies ist möglich da $\dim U = \dim Q$. Dann ist $f : V \to W$ definiert als

$$f(a + x) := f_0 + F(x) \ , \ \ f_0 \in W$$

eine Affinität. Setzen

$$F(-1, 1, 0) = (1, 2, 1, 0) \ , \ \ F(1, 0, 1) = (-2, -3, 0, 1)$$

und setzen linear Fort. Somit ist

$$\dim \operatorname{image} F = 2 = \dim U \ \ \to \ \ \dim \operatorname{kernel} F = 0$$

d.h F ist ein Isomorphismus. Setzen o.B.d.A $f_0 = b$ und erhalten so die Affinität

$$f(x_1, x_2, x_3) := (1, 2, 0) + F(x_1 - 2, x_2, x_3) \ , \ \ x \in V$$

Aufgabe 06

Das charakteristische Polynom p_A der Matrix A ist gegeben durch

$$p_A(X) = \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & 1 \\ -1 & X & 0 & 0 \\ 0 & -1 & X & 2 \\ 0 & 0 & -1 & X \end{pmatrix} = X \cdot \det \begin{pmatrix} X & 0 & 0 \\ -1 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & X & 0 \\ 0 & -1 & X \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2 = (X - i)^2 (X + i)^2$$

Somit besteht die Jordan-Form A_J nur aus JK zu den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm i$. Die Summe der Größen der JK zu jedem Eigenwert ist außerdem genau jeweils 2. Durch Gaußsche Elimination ergibt sich

$$\dim \operatorname{kernel}(A - iI) = \dim \operatorname{kernel}(A + iI) = 1$$

Somit gibt es genau ein JK zu jedem Eigenwert, d.h

$$A_J = \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$