Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 12

Abgabe am Do 05.07. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine schiefsymmetrische Matrix.

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass $b(x, y) = x^T \cdot A \cdot y$ eine alternierende Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ definiert. (Wurde stillschweigend in der Vorlesung vorausgesetzt).

b) (1 P.) Folgern Sie, dass weder 1 noch -1 ein Eigenwert von A ist.

c) (3 P.) Zeigen Sie, dass die Matrix $(E_n + A)(E_n - A)^{-1}$ existiert und orthogonal ist.

Aufgabe 2: Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine Matrix.

a) (2 P.) Zeigen Sie, dass die Abbildung $b\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ gegeben durch $b(z, w) := \langle A \cdot z, A \cdot w \rangle$ eine hermitesche Form auf $\mathbb{C}^n$ ist, wobei $\langle , \rangle$ das Standardskalarprodukt ist.

b) (3 P.) Bestimmen Sie für $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & -2i \end{pmatrix}$ eine Orthogonalbasis dieser hermiteschen Form.

Aufgabe 3: (4 BP.) *Fortsetzung von Aufgabe 2*
Zeigen Sie umgekehrt: ist $b\colon \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ eine positiv definite hermitesche Form auf $\mathbb{C}^2$, so gibt es eine **obere Dreiecksmatrix** $A \in M_2(\mathbb{C})$ derart, das $b(z, w) = \langle Az, Aw \rangle$ ist.

Aufgabe 4: (2 P.) Die Vektoren $v_0, v_1, \ldots, v_d$ im k^n seien affin unabhängig. Sei $v \in k^n$ eine affine Kombination von $v_0, \ldots, v_d$. Zeigen Sie: es gibt *genau* ein System $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in k$ von Skalaren derart, dass $\sum_{i=0}^d \lambda_i = 1$ und $\sum_{i=0}^d \lambda_i v_i = v$ ist.

Aufgabe 5: (3 P.) Sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ der affine Unterraum $x_1 + x_2 - x_3 = 2$ und $W \subseteq \mathbb{R}^4$ der affine Unterraum $x_1 - x_3 + 2x_4 = 1$, $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1$. Konstruieren Sie eine Affinität von W nach V.

Aufgabe 6: (4 BP.) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C})\,.$$

Nominell erreichbare Punktzahl: 16