Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 11 - Lösungen

Stilianos Louca

11. April 2008

Aufgabe 01

a) Beginnen mit $b(v,v) = b(u,u)$ und schreiben

$$0 = b(\underbrace{u+v}_{\in U}, v+u) - b(v,v) - b(u,u) = b(u,v) + b(v,u) = 2b(u,v) \;\to\; b(u,v) = 0$$

b) Suchen für den total Isotropen Unterraum $U_I < \mathbb{R}^4$ zwei linear unabhängige Vektoren $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^4$ als Basis mit

$$\beta(b_1,b_1) = \beta(b_2,b_2) = \beta(b_1,b_2) = 0$$

Dann wäre $U_I = \text{span}\{b_1, b_2\}$ total Isotrop, denn

$$\forall\ v = v^1 b_1 + v^2 b_2 \in U_I : \beta(v,v) = \beta\left(v^i b_i, v^j b_j\right) = v^i v^j \underbrace{\beta(b_i,b_j)}_{0} = 0$$

Solch eine Basis wäre $b_1 := e_1 + e_2,\ b_2 := e_3 + e_4$, denn es ist

$$\beta(b_1,b_1) = \underbrace{\beta(e_1,e_1)}_{1} + \underbrace{\beta(e_2,e_2)}_{-1} + 2\underbrace{\beta(e_1,e_2)}_{0} = 0$$

$$\beta(b_2,b_2) = \underbrace{\beta(e_3,e_3)}_{1} + \underbrace{\beta(e_4,e_4)}_{-1} - 2\underbrace{\beta(e_3,e_4)}_{0} = 0$$

$$\beta(b_1,b_2) = \beta(e_1,e_3) + \beta(e_1,e_4) + \beta(e_2,e_3) + \beta(e_2,e_4) = 0$$

Für den total anisotropen Unterraum $U_A < \mathbb{R}^4$ suchen wir zwei linear unabhängige Vektoren $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^4$ mit

$$\beta(c_1,c_1) \neq 0 \neq \beta(c_2,c_2) \;\wedge\; b(c_1,c_2) = 0 \;\wedge\; \text{sgn}\,\beta(c_1,c_1) = \text{sgn}\,\beta(c_2,c_2)$$

Dann ist $U_A = \text{span}\{c_1, c_2\}$ tatsächlich total anisotrop, denn für $0 \neq v \in U_A$ wäre

$$\beta(v,v) = \beta\left(v^i c_i, v^j c_j\right) = v^i v^j \underbrace{\beta(c_i,c_j)}_{\delta_{ij}} = \underbrace{v^1 v^1}_{\geq 0} \beta(c_1,c_1) + \underbrace{v^2 v^2}_{\geq 0} \beta(c_2,c_2) \neq 0$$

Solch eine Basis bilden die Vektoren $c_1 := e_1,\ c_2 := e_3$, denn es ist

$$\beta(c_1,c_1) = \beta(e_1,e_1) = 1$$

$$\beta(c_2,c_2) = \beta(e_3,e_3) = 1$$

$$\beta(c_1,c_2) = \beta(e_1,e_3) = 0$$

c) Da b nicht ausgeartet ist, nimmt sie nach dem Satz von Sylvester, bzgl. einer Basis $b_1, .., b_n$ die Matrix

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix}$$

an. Für die Basisvektoren $b_1, ..., b_k$ gilt

$$b(b_i, b_j) = \delta_{ij}$$

Nach der gleichen Logik wie im Teil (b), ist somit $U_+ := \text{span}\{b_1, ..., b_k\}$ total anisotrop, denn $\forall\ 0 \neq v \in U_+$ ist

$$b(v, v) = v^i v^j b(b_i, b_j) = v^i v^j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{k} \left(v^i\right)^2 > 0$$

Für die Basisvektoren $b_{k+1}, ..., b_n$ gilt

$$b(b_i, b_j) = -\delta_{ij}$$

so dass analog $U_- := \text{span}\{b_{k+1}, .., b_n\}$ total anisotrop ist:

$$\forall\ 0 \neq v \in U_- : b(v, v) = -\sum_{i=k+1}^{n} \left(v^i\right)^2 < 0$$

Doch wegen $n = k + (n - k) = \dim U_+ + \dim U_-$ hat mindestens einer von beiden Räumen Dimension $\geq \dfrac{n}{2}$.
Bemerke: Aufgrund der Beweisschritte ist ersichtlich:

$$\text{sgn}\, b = 2k - n \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists \text{ total anisotroper } U_A \leq V \text{ mit } \dim U_A > \frac{n}{2}$$

d) Sei $U_I \leq V$ ein total isotroper Unterraum des n-dimensionalen Vektorraumes V. Sei $U_A \leq V$ ein total anisotroper Unterraum mit $\dim U_A \geq \dfrac{n}{2}$ (nach Teil (c) existiert dieser). Sei ferner $v \in U_I \cap U_A$. Dann ist definitionsgemäß

$$b(v, v) \neq 0 \text{ falls } v \neq 0 \quad \wedge \quad b(v, v) = 0$$

also $v = 0 \;\rightarrow\; U_I \cap U_A = \{0\}$. Somit ist

$$n \geq \dim\left(U_I \oplus U_A\right) = \dim U_I + \dim U_A \geq \dim U_I + \frac{n}{2} \;\rightarrow\; \dim U_I \leq \frac{n}{2}$$

Ist ferner $\dim U_I = \dfrac{n}{2}$ dann ist auch notwendigerweise $\dim U_A = \dfrac{n}{2}$, d.h es existiert kein total anisotroper Unterraum U_A mit $\dim U_A > \dfrac{n}{2}$. Somit ist nach Teil (c) $\text{sgn}\, b = 0$. $\square$

Aufgabe 02

Die die quadratische Form erzeugende symmetrische Bilinearform $b : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
b(v, w) =& \frac{1}{2}\left[q(v + w) - q(v) - q(w)\right] \\
=& \frac{1}{2}\Big[(v_1 + w_1)^2 + (v_2 + w_2)^2 - (v_3 + w_3)^2 - (v_4 + w_4)^2 - v_1^2 - v_2^2 - v_3^2 - v_4^2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 - w_4^2\Big] \\
& + 2(v_1 + w_1)(v_2 + w_2) - (v_1 + w_1)(v_4 + w_4) + (v_2 + w_2)(v_3 + w_3) \\
& - 2v_1v_2 + v_1v_4 - v_2v_3 - 2w_1w_2 + w_1w_4 - w_2w_3 \\
=& v_1w_1 + v_2w_2 - v_3w_3 - v_4w_4 + 2v_1w_2 + 2w_1v_2 - w_1v_4 - v_1w_4 + v_2w_3 + w_2v_3
\end{aligned}$$

deren Matrix bzgl. der Standardbasis gegeben ist durch

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

aus der man ablesen kann $\operatorname{rang}(b) = 3$.
Berechnen eine Orthogonalbasis B für $\mathbb{R}^4$ bzgl. b: Es ist $b(e_1, e_1) = 1 \neq 0$. Setzen also $b_1 := e_1$ und erhalten

$$b_1^\perp = \operatorname{kernel} b(b_1, \cdot) = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(e_1 + e_4),\ (e_2 - 2e_1),\ e_3\}$$

Es ist $b(e_3, e_3) = -1 \neq 0$, setzen also $b_2 := e_3$ und erhalten

$$\operatorname{span}\{b_1, b_2\}^\perp = \operatorname{kernel} b(b_1, \cdot) \cap \operatorname{kernel} b(b_2, \cdot) = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(e_1 + e_4),\ (e_2 + e_3 - 2e_1)\}$$

Es ist $b(e_1 + e_4, e_1 + e_4) = -1 \neq 0$, setzen also $b_3 := e_1 + e_4$ und erhalten

$$\operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3\}^\perp = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(-1, 1, 1, 1)\}$$

Setzen $b_4 := (-1, 1, 1, 1)$. Bzgl. dieser Basis wirkt nun b als die Matrix

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

woran zu sehen ist dass $\operatorname{sgn}(b) = -1$ ist. Ist $v_B = (v_B^1, .., v_B^4)$ der Koordinatenvektor des Vektors v bzgl. der Basis B, dann ist

$$q(v) = (v_B^1)^2 - (v_B^2)^2 - 2(v_B^3)^2$$

Betrachten die Matrix

$$S = {}_BM_K(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \ ,\ {}_KM_B(I) = S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist

$$q(v) = (v_1 + 2v_2 - v_4)^2 - (-v_2 + v_3)^2 - 2\,(-v_2 + v_4)^2$$

Aufgabe 03

Offensichtlich ist $b \neq 0$, d.h $r \in \{1, 2\}$. Es ist $b(e_2, e_3) = 1$ so dass wir setzen $x_1 := e_2,\ y_1 := e_3$. Betrachten den Unterraum $U = \operatorname{span}\{x_1, y_2\}$ und

$$U^\perp = \operatorname{kernel} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{(-2/3, -1, 0, 0, 1), (1, -1, 0, 1, 0), (1/3, 0, 1, 0, 0)\}$$

Es ist

$$b\,((1, -1, 0, 1, 0),\ (1/3, 0, 1, 0, 0)) = \frac{5}{3}$$

Setzen also

$$x_2 := (1, -1, 0, 1, 0)\ ,\ y_2 := \frac{3}{5}(1/3, 0, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, 0, 0\right)$$

so dass gilt $b(x_2, y_2) = 1$. Suchen schließlich ein $z_1 \in \{x_1, x_2, y_1, y_2\}^\perp$, d.h betrachten

$$\operatorname{kernel}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3/5 \end{pmatrix} = \operatorname{span}\{\underbrace{(-1, -2/5, 4/5, -3/5, 1)}_{=:\, z}\}$$

Somit wirkt b bzgl. der Basis x_1, x_2, y_1, y_2, z als die Matrix

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus auch gleich abzulesen ist: $\operatorname{rang} b = 4$.

Aufgabe 04

Sei A diese Matrix.

a) Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ, d.h $\dim \operatorname{kernel}(A - \lambda I)$, entspricht der Anzahl der Jordan Kästchen (JK) dieses Eigenwertes.

b) Da A diagonalisierbar ist, ist das charakteristische Polynom p_A und somit auch das Minimalpolynom μ_A als Produkt linearer Faktoren schreibbar. Somit besteht das Minimalpolynom nur aus Faktoren $(X - \lambda)^{k_\lambda}$ wobei λ ein Eigenwert von A ist. Die Potenz k (d.h Vielfachheit von λ als Nullstelle in μ_A) ist gleich der Größe des größten JK mit dem Eigenwert λ.

c) Kennt man die algebraische Vielfachheit jedes Eigenwertes λ als Nullstelle von p_A, so kennt man automatisch p_A. Die algebraische Vielfachheit von λ ist jedoch gleich der Summe der Größen der JK bzgl. λ.