Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 11

Abgabe am Do 28.06. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Sei $b \in \operatorname{Sym}^2(\mathbb{R}^n)$ eine reell symmetrische Bilinearform. Ein Unterraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *total isotrop* bzw. *anisotrop*, falls $b(v,v) = 0$ gilt für alle $v \in U$ bzw. $b(v,v) \neq 0$ gilt für alle $0 \neq v \in U$. Zeigen Sie:

a) (1 P.) Ist U total isotrop, so ist $b(u,v) = 0$ für alle $u, v \in U$.

b) (2 P.) Sei $\beta \in \operatorname{Sym}^2(\mathbb{R}^4)$ gegeben durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Finden Sie einen zweidimensionalen anisotropen Unterraum und einen zweidimensionalen total isotropen Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

Ab jetzt nehmen wir an, dass b außerdem nicht ausgeartet ist.

c) (2 P.) Für jedes solche b gibt es mindestens einen anisotropen Unterraum U mit $\dim U \geq \frac{n}{2}$. (Orthogonalbasis!)

d) (2 BP.) Für jeden total isotropen Unterraum U gilt $\dim U \leq \frac{n}{2}$. Ist $\dim U = \frac{n}{2}$, so gilt $\operatorname{Signatur}(b) = 0$.

Aufgabe 2: (6 P.) Diagonalisieren Sie die quadratische Form q auf $\mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3\,.$$

(2 BP.) Was sind der Rang und die Signatur der quadratischen Form?

Aufgabe 3: (5 P.) Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ definiert eine alternierende Form $b \in \operatorname{Alt}^2(\mathbb{R}^5)$. Bezüglich einer geeigneten Basis von $\mathbb{R}^5$ muss die Matrix von b die Blockmatrixgestalt $\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben. Finden Sie eine solche Basis. Was ist der Rang der Bilinearform?

Aufgabe 4: (*) Wie liest man von einer Matrix in Jordansche Normalform die folgenden Informationen ab?

a) Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts λ;

b) Das Minimalpolynom der Matrix;

c) Das charakteristische Polynom der Matrix.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16