Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 10 - Lösungen

Stilianos Louca

9. April 2008

Aufgabe 01

Das charakteristische Polynom p_A von A ist gegeben durch

$$p_A(X) = (X-1)^3$$

worin zu erkennen ist dass die Jordan-Form A_J aus 1,2 oder 3 Jordan-Kästchen zum Eigenwert 1 bestehen wird, deren Größen-Summe genau 3 beträgt. Somit ist die Information *wie viele* JK es sein werden, genug um die Jordan-Form eindeutig zu bestimmen. Die Anzahl der JK ist aber identisch

$$\dim \operatorname{kernel}(A-I) = n - \operatorname{rang}(A-I) = 3 - \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Fall $a=b=c=0$. Dann ist A schon in Jordan-Form.
- Fall $a=0,\ (b,c)\neq(0,0)$ oder $a\neq 0 = c$. Dann besteht A_J aus genau 2 JK:

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Fall $a \neq 0 \neq c$. Dann besteht A_J aus 1 JK:

$$A_J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 02

Seien

$$p(X) = p_i X^i \ , \ q(X) = q_i X^i$$

zwei beliebige Polynome $p, q \in P_n$ und $b_m : P_n \times P_n \to \mathbb{R}\ ,\ 0 \le m \le 2(n-1)$ definiert durch

$$b_m(p,q) := \text{der Koeffizient von } X^m \text{ in } p'(X)q'(X) = (X^m)^* \left(p'q'\right)$$

Wählen die Basis $X^0 := 1, X, X^2, .., X^{2n}$ für P_{2n}. Dann ist

$$b_m(p,q) = (X^m)^* \left[\left(\sum_{i=0}^n i p_i X^{i-1} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^n j q_j X^{j-1} \right) \right] = (X^m)^* \left[\sum_{i,j=0}^n ij p_i q_j X^{i+j-2} \right]$$

$$= \sum_{i,j=0}^n ij p_i q_j \underbrace{(X^m)^* X^{i+j-2}}_{\delta_{m,i+j-2}} = \sum_{i+j=m+2} ij p_i q_j = \sum_{i=1}^{m+1} i(m+2-i) p_i q_{m+2-i}$$

a) Durch obere Rechnung ergibt sich

$$b_m(p,q) = \sum_{i+j=m+2} ijp_iq_j = \sum_{j+i=m+2} jiq_jp_i = b_m(q,p)$$

d.h b_m ist symmetrisch. Ferner haben wir gesehen dass b_m eine Verkettung der Ableitung, der Polynommultiplikation und einer Linearform auf P^*_{2n-2} ist. Alle 3 Abbildungen sind linear, weshalb auch b_m linear in beiden Argumenten ist. $\square$

b) Sei nun speziell $m = n-1$, d.h

$$b_m(p,q) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)p_iq_{n+1-i}$$

Sei $q \in P_n$ ein Polynom mit $b_m(\cdot, q) \equiv 0$, d.h $q \in \operatorname{kernel} b_r$. Dann ist

$$\forall\ p \in P_n : b_m(p,q) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)p_iq_{n+1-i} = 0$$

Setzen $p_i = \delta_{ik}$ für irgendein $0 \leq k \leq n$. Dann ist

$$0 = b_m(p,q) = \sum_{i=1}^{n} i(n+1-i)q_{n+1-i}\delta_{ik} = k(n+1-k)q_{n+1-k} \ \rightarrow\ q_{n+1-k} = 0$$

und somit allgemein $q_j = 0\ \forall\ j \geq 1$. Das heißt

$$\operatorname{kernel} b_r = \operatorname{kernel} b_l = \operatorname{span}\{1\}$$

und b_{n-1} ist somit ausgeartet. Speziell in unserem Fall ist also $b_2 : P_3 \times P_3 \rightarrow \mathbb{R}$ ausgeartet.

c) Allgemein sei nun wieder $0 \leq m \leq 2(n-1)$. Dann ist die Matrix $A_b \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ von b bzgl. der oben genannten Basis gegeben durch

$$b_{ij} = b\left(X^{i-1}, X^{j-1}\right) = (X^m)^* \left[(i-1)X^{i-2}(j-1)X^{j-2}\right] = (i-1)(j-1)\,(X^m)^*\, X^{i+j-4} = (i-1)(j-1)\delta_{m,i+j-4}$$

Speziell für $n = 3, m = 2$ ist

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 03

Die Abbildung b ist alternierend (und somit schiefsymmetrisch), denn

$$b\left((x_1,x_2),(x_1,x_2)\right) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1 \\ x_2 & x_2 \end{pmatrix} = 0$$

und bilinear denn

$$b\left(\lambda(x_1,x_2) + \mu(y_1,y_2),(z_1,z_2)\right) = \det \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 & z_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda b((x_1,x_2),(z_1,z_2)) + \mu b((y_1,y_2),(z_1,z_2))$$

$$b\left(z, \lambda x + \mu y\right) = -b\left(\lambda x + \mu y, z\right) = -\lambda b(x,z) - \mu b(y,z) = \lambda b(z,x) + \mu b(z,y)$$

Sei nun $x \in \mathbb{K}^2$ so dass $b_l(x) = b(x,\cdot) \equiv 0$, d.h

$$\forall\ y \in \mathbb{K}^2 : b(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = 0$$

Setzen $y = (1,0)$ bzw. $y = (0,1)$ und sehen dass $x = (0,0) = 0$ sein muss. Wegen schiefsymmetrie ist auch kernel $b_r = \{0\}$. Somit ist b nicht ausgeartet.
Berechnen die Matrix von b bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{K}^2$:

$$b_{ij} = b(e_i, e_j) = b((\delta_{1i}, \delta_{2i}), (\delta_{1j}, \delta_{2j})) = \delta_{1i}\delta_{2j} - \delta_{2i}\delta_{1j} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 04

Da det() linear in den Spalten ist, ist auch b bilinear. Wegen

$$b(x,x) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_1 & 1 \\ x_2 & x_2 & 1 \\ x_3 & x_3 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

ist b alternierend. Setzt man $x = (1,1,1) \neq 0$ so ist $b_l(x) = b(x, \cdot) \equiv 0$, weshalb b ausgeartet ist! Bzgl. der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ergibt sich die Matrix von b als

$$b_{ij} = b(e_i, e_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 05

a) Suchen eine Basis $b_1, .., b_m$ für $P_2^\perp \leq P_3$ bzgl. der Bilinearform $b : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$, definiert als

$$b(p,q) = \left(X^2\right)^* (p'q')$$

wobei $1^*, X^*, .., (X^n)^*$ die Dualbasis zur Basis $1, X, .., X^n$ im P_n ist. Sei $p \in P_2^\perp$, d.h

$$\forall\ q \in P_2 : b(p,q) = 0$$

Setzen wir $q = X^2 \in P_2$ bzw. $q = X \in P_2$ so folgt

$$0 = \left(X^2\right)^* (2x \cdot p') \ \rightarrow\ \left(X^2\right)^* p = 0$$

$$0 = \left(X^2\right)^* (1 \cdot p') = \left(X^2\right)^* p' = 3\left(X^3\right)^* p$$

$$\rightarrow\ p(X) = \alpha + \beta X \ \rightarrow\ P_2^\perp \subset \operatorname{span}\{1, X\}$$

Andersrum, ist $\forall\ p(X) = \alpha + \beta X : p \in P_2^\perp$, denn $\forall\ q \in P_2$ ist

$$q' \in P_1 \ \rightarrow\ p'q' = \beta \cdot q' \in P_1 \ \rightarrow\ b(p,q) = \left(X^2\right)^* (p'q') = 0$$

und somit

$$\operatorname{span}\{1, X\} \subset P_2^\perp \ \rightarrow\ P_2^\perp = \operatorname{span}\{1, X\}$$

d.h $1, X$ bilden eine Basis von $P_2^\perp$.

b) Suchen eine Basis für $T^\perp = \operatorname{span}\{(1,1,0)\}^\perp = (1,1,0)^\perp$ bzgl. der Bilinearform

$$b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\ ,\ b(x,y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$v \in (1,1,0)^\perp \ \Leftrightarrow\ b(v,u) = \det \begin{pmatrix} v_1 & 1 & 1 \\ v_2 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = v_1 - v_2 = 0 \ \Leftrightarrow\ v \in \operatorname{span}\{(1,1,0), (0,0,1)\}$$

d.h $(1,1,0), (0,0,1)$ ist eine Basis für $T^\perp$.

Aufgabe 06

Suchen eine Basis $f_1, .., f_4 \in P_3$ mit $b(f_i, f_j) = 0$ für $i \neq j$. Verwenden den in der Vorlesung vorgestellten Algorithmus. Es ist $b(X^2, X^2) = 4 \neq 0$, so dass wir setzen $f_1 := X^2$. Berechnen eine Basis für den 3-dimensionalen Unterraum $f_1^\perp$. Eine solche Basis wäre $1, X, X^3$, d.h

$$f_1^\perp = \operatorname{span}\left\{1, X, X^3\right\} \;\rightarrow\; P_3 = \operatorname{span}\{f_1\} \oplus \operatorname{span}\left\{1, X, X^3\right\}$$

Suchen also eine orthogonale Basis für $\operatorname{span}\left\{1, X, X^3\right\}$. Es ist $b(X + X^3, X + X^3) = 6 \neq 0$ so dass wir setzen $f_2 := X + X^3$, weshalb gilt

$$P_3 = \operatorname{span}\{f_1\} \oplus \operatorname{span}\{f_2\} \oplus \operatorname{span}\{f_1, f_2\}^\perp$$

Eine Basis für $\operatorname{span}\{f_1, f_2\}^\perp$ wäre $1, X - X^3$, d.h

$$P_3 = \operatorname{span}\{f_1\} \oplus \operatorname{span}\{f_2\} \oplus \operatorname{span}\{1, X - X^3\}$$

Diese ist jedoch schon orthogonal! Das heißt, das System

$$1, X^2, X + X^3, X - X^3$$

bildet eine orthogonale Basis für P_3. Bezüglich dieser nimmt b die Matrix

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

an.