Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

# Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 — Übungsblatt 10

Abgabe am Do 21.06. in der Vorlesung.

**Aufgabe 1:** (4 BP.) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in Abhängigkeit von den Parametern $a, b, c$.

**Aufgabe 2:** Zur Erinnerung: $P_n$ ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$.
Sei $b\colon P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung gegeben durch

$$b(p, q) = \text{der Koeffizient von } X^2 \text{ in } p'(X)q'(X).$$

a) (1 P.) Zeigen Sie, dass $b$ eine symmetrische Bilinearform auf $P_3$ ist.

b) (2 P.) Ist $b$ ausgeartet oder nicht ausgeartet?

c) (2 P.) Berechnen Sie die Matrix von $b$ bezüglich einer Basis Ihrer Wahl von $P_3$.

**Aufgabe 3:** (4 P.) Sei $b\colon k^2 \times k^2 \to k$ die Abbildung

$$b((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $b$ eine nicht ausgeartete alternierende Bilinearform auf $k^2$ ist, und berechnen Sie die Matrix von $b$ bezüglich der Standardbasis von $k^2$.

**Aufgabe 4:** (4 BP.) Sei $b\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ die Abbildung

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $b$ eine ausgeartete alternierende Bilinearform auf $\mathbb{R}^3$ ist, und berechnen Sie die Matrix von $b$ bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 5:** Berechnen Sie eine Basis für $T^\perp$

a) (3 P.) in Aufgabe 2 für $T = P_2$;

b) (3 BP.) in Aufgabe 4 für $T = \{(1, 1, 0)\}$.

**Aufgabe 6:** (4 P.) Berechnen Sie eine orthogonale Basis der symmetrischen Bilinearform in Aufgabe 2.

**Nominell erreichbare Punktzahl:** 16