Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 09 - Lösungen

Stilianos Louca

7. April 2008

Aufgabe 01

Gegeben seien zwei triangulierbare Endomorphismen $F, G : V \to V$ des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Betrachten folgende Methode zur Berechnung der Jordan-Form eines Endomorphismus F:

- Berechnen den Hauptraum $H_\lambda(F)$ der Dimension N_λ für jeden Eigenwert λ.
- Da $(F - \lambda I)$ in $H_\lambda(F)$ Nilpotent ist, kann dieser in eine direkte Summe von m_λ zyklischen Unterräumen

$$Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda 1}) \oplus \cdots \oplus Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda m_\lambda})$$

zerlegt werden, mit

$$Z_{(A-\lambda I)}(v_{\lambda i}) = \text{span}\left\{v_{\lambda i}, (F-\lambda I)v_{\lambda i}, \ldots, (F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-1}v_{\lambda i}\right\} \text{ , } \dim Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda i}) =: r_{\lambda i}$$

- Setzen wir für jeden zyklischen Raum $Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda i})$ im Hauptraum $H_\lambda(F)$ als Basis

$$b_1 := (F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-1}v_{\lambda i}, \ldots,\ b_{r_{\lambda i}-1} := (F-\lambda I)v_{\lambda i},\ b_{r_{\lambda i}} := v_{\lambda i}$$

so wirkt F bzgl. dieser Basis als die Jordan-Matrix

$$A_J = \text{diag}\left(J_{r_{\lambda_1 1}}(\lambda_1),\ J_{r_{\lambda_1 2}}(\lambda_1), \ldots,\ J_{r_{\lambda_K m_{\lambda_K}}}(\lambda_k)\right)$$

wobei $\lambda_1, ..., \lambda_K$ die Eigenwerte des Endomorphismus sind.

Richtung "$\Rightarrow$"

Sei A_J die für beide Endomorphismen F, G identische Jordan-Form. Dann gibt es eine bijektive Assoziation

$$Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda i}) \leftrightarrow Z_{(G-\lambda I)}(u_{\lambda i})$$

zwischen den zyklischen Unterräumen bzgl. F und G so dass alle assoziierten zyklischen Unterräume $Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda i})$, $Z_{(G-\lambda I)}(u_{\lambda i})$ gleiche Dimension $r_{\lambda i}$ haben. Betrachten den Unterraum

$$\text{kernel}(F-\lambda I)^m \leq H_\lambda(F)$$

und einen beliebigen zyklischen Unterraum $Z_{(F-\lambda I)}(v_{\lambda i}) \leq H_\lambda(F)$ der Dimension $r_{\lambda i}$. Für $r_{\lambda i} \leq m$ ist

$$(F-\lambda I)^m v_{\lambda i} = 0 \ \to \ v_{\lambda i}, (F-\lambda I)v_{\lambda i}, \ldots, (F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-1}v_{\lambda i} \in \text{kernel}(F-\lambda I)^m$$

Andernfalls ist für $r_{\lambda i} > m$

$$(F-\lambda I)^m v_{\lambda i} \neq 0 \ \to \ v_{\lambda i}, (F-\lambda I)v_{\lambda i}, \ldots, (F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-1-m}v_{\lambda i} \notin \text{kernel}(F-\lambda I)^m$$

$$(F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-m}v_{\lambda i}, \ldots, (F-\lambda I)^{r_{\lambda i}-1}v_{\lambda i} \in \text{kernel}(F-\lambda I)^m$$

Durch obere Betrachtung haben wir M_λ^m (von N_λ) Basisvektoren

$$b_1, ..., b_{M_\lambda^m}$$

von $H_\lambda(F)$ gefunden, die auch in $\text{kernel}(F-\lambda I)^m$ sind. Die restlichen

$$b_{M_\lambda^m+1}, ..., b_{N_\lambda}$$

sind <u>nicht</u> in $\text{kernel}(F-\lambda I)^m$. Doch das impliziert $\dim\text{kernel}(F-\lambda I)^m = M_\lambda^m$ (Beweis: siehe Anhang). Doch diese Zahl M_λ^m hing <u>nur</u> von den Dimensionen der zyklischen Unterräume und nicht von den eigentlichen Räumen ab, so dass wir für den Endomorphismus G genau das gleiche M_λ^m bekommen würden. Demnach ist

$$\dim\text{kernel}(F-\lambda I)^m = \dim\text{kernel}(G-\lambda I)$$

Richtung "$\Leftarrow$"

Seien $F, \tilde{F}$ zwei triangulierbare Endomorphismen, mit jeweils den Jordan-Matrizen $A, \tilde{A}$:

$$A = \text{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), \ldots, J_{r_m}(\lambda_m)\right)$$

$$\tilde{A} = \text{diag}\left(J_{\tilde{r}_1}(\tilde{\lambda}_1), \ldots, J_{\tilde{r}_{\tilde{m}}}(\tilde{\lambda}_{\tilde{m}})\right)$$

Sei nun

$$\dim\text{kernel}(F-\lambda I)^m = \dim\text{kernel}(\tilde{F}-\lambda I)^m \quad \forall\ m \geq 1,\ \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Insbesondere ist also

$$\dim H_\lambda(F) = \dim H_\lambda(\tilde{F}) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

$$\dim E_\lambda(F) = \dim E_\lambda(\tilde{F}) \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{K}$$

weshalb die Anzahl der JK und die Summe deren Größen pro Eigenwert λ für beide Matrizen identisch ist. Somit können wir bijektiv die JK pro Eigenwert der beiden Jordan-Matrizen assoziieren

$$J_{r_i}(\lambda_i) \leftrightarrow J_{\tilde{r}_i}(\lambda_i)$$

wobei die r_i und $\tilde{r}_i$ pro Eigenwert o.B.d.A nach wachsendem Wert geordnet sind. Natürlich ist dann auch $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$, $\tilde{m} = m$. Jedem JK $J_{r_i}(\lambda_i)$ entspricht ein zyklischer Unterraum

$$U_i = Z_{(F-\lambda_i I)}(v_i)\ ,\ \dim U_i = r_i$$

Bemerke: Ist $A \sim \tilde{A}$ so ist auch $r_i = \tilde{r}_i\ \forall\ 1 \leq i \leq m$.
Annahme: $A \nsim \tilde{A}$, d.h es gibt ein (kleinstes) $1 \leq k \leq m$ für das $r_k \neq \tilde{r}_k$ ist, o.B.d.A $r_k > \tilde{r}_k$. Betrachten die Unterräume

$$K_{\lambda_k}^{r_k} := \text{kernel}\left(F-\lambda_k I\right)^{r_k}\ \ ,\ \tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k} := \text{kernel}\left(\tilde{F}-\lambda_k I\right)^{r_k}$$

und ein beliebiges JK $J_{r_i}(\lambda_i)$, $\lambda_i = \lambda_k$ dem der zyklischer Unterraum $U_i := Z_{(F-\lambda_k I)}(v_i)$ entspricht. Ist $r_i \leq r_k$, so ist

$$(F-\lambda_k I)^{r_k} v_i = 0\ \rightarrow\ v_i, (F-\lambda_k I)v_i, \ldots, (F-\lambda_k I)^{r_i-1} v_i \in K_{\lambda_k}^{r_k}$$

d.h alle r_i (zyklisch Konstruierten) Basiselemente von U_i sind in $K_{\lambda_k}^{r_k}$.
Ist $r_i > r_k$, so ist

$$(F-\lambda_k I)^{r_i-1} v_i \neq 0\ \wedge\ (F-\lambda_k I)^{r_i} v_i = 0$$

$$\rightarrow\ \left\{(F-\lambda_k I)^l v_i \in K_{\lambda_k}^{r_k}\ \Leftrightarrow\ l \geq r_i - r_k\right\}$$

d.h genau r_k (zyklisch Erzeugte) Basiselemente von U_i sind in $K_{\lambda_k}^{r_k}$. Einfach gesagt, sind genau $\min\{r_i, r_k\}$ zyklische Basiselemente von U_i in $K_{\lambda_k}^{r_k}$. Analoge Überlegungen gelten auch für $\tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k}$.

Seien l_l und l_h jeweils das kleinste und das größte l so dass $\lambda_l = \lambda_k$ ist (haben gesehen dass diese für beide Endomorphismen gleich sind). Somit ist (analog zu Teil (a))

$$\dim \mathbb{K}_{\lambda_k}^{r_k} = \text{Anzahl der zyklischen Basiselemente in } K_{\lambda_k}^{r_k} = \sum_{i=l_l}^{k-1} r_i + \sum_{i=k}^{l_h} r_k$$

$$\dim \tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k} = \text{Anzahl der zyklischen Basiselemente in } \tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k} = \sum_{i=l_l}^{k-1} r_i + \sum_{i=k}^{l_h} \min\{\tilde{r}_i, r_k\} < \sum_{i=l_l}^{k-1} r_i + \sum_{i=k}^{l_h} r_k = \dim \mathbb{K}_{\lambda_k}^{r_k}$$

$$\rightarrow \ \dim K_{\lambda_k}^{r_k} \neq \dim \tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k}$$

Haben also gezeigt

$$A \nsim \tilde{A} \ \Rightarrow \ \exists\, k \geq 1 : \dim K_{\lambda_k}^{r_k} \neq \dim \tilde{K}_{\lambda_k}^{r_k}$$

Demnach folgt die Implikation

$$\dim K_{\lambda_k}^{m} = \dim \tilde{K}_{\lambda_k}^{m} \quad \forall\, m \geq 1 \ \Rightarrow \ A \sim \tilde{A} \quad \square$$

Aufgabe 02

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ zwei Matrizen mit den Jordanschen Normalforen A_J, B_J, d.h

$$A \sim A_J \ , \ B \sim B_J$$

wobei $\sim$ die Ähnlichkeits-Äquivalenzrelation darstellt. Somit gilt wegen Transitivität:

$$A_J \sim B_J \Leftrightarrow \ A \sim B$$

Jedoch ist die Jordansche Normalform einer Matrix eindeutig, so dass $A_J \sim B_J$ äquivalent zur Aussage $A_J \equiv B_J$ ist. Somit folgt die Äquivalenz

$$A_J \equiv B_J \ \Leftrightarrow \ A \sim B$$

a) Es gilt für beliebige $m \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\dim \operatorname{kernel}(A - \lambda I)^m = n - \operatorname{rang}(A - \lambda I)^m = n - \operatorname{rang}\left[(A - \lambda I)^m\right]^T = n - \operatorname{rang}\left[(A - \lambda I)^T\right]^m$$

$$= n - \operatorname{rang}\left(A^T - \lambda I^T\right)^m = n - \operatorname{rang}\left(A^T - \lambda I\right)^m = \dim \operatorname{kernel}(A^T - \lambda I)^m$$

Somit sind nach Aufgabe (01) die Jordanschen Normalformen der Matrizen A, A^T identisch und ferner $A \sim A^T$. $\square$

b) **Variante:**

- Betrachten zuerst das Jordan-Kästchen $J_r(\lambda) \in M_r(\mathbb{K})$ das als Endomorphismus F bzgl. der Basis $B = b_1, ..., b_r$ operiert:

$$J_r(\lambda) = {}_B M_B(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Dann operiert F bzgl. der Basis

$$\mathcal{B} = \beta_1, ..., \beta_r$$
$$\beta_1 := b_r, ..., \beta_r := b_1$$

als die Matrix

$$
{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix} = (J_r(\lambda))^T
$$

denn

$$
F(\beta_1) = F(b_r) = \lambda b_r + b_{r-1} = \lambda\beta_1 + \beta_2, \dots, F(\beta_r) = F(b_1) = \lambda b_1 = \lambda\beta_r
$$

- Betrachten nun einen beliebigen Endomorphismus mit der Jordan-Matrix

$$
A_J = \operatorname{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), .., J_{r_m}(\lambda_m)\right) \in M_n(\mathbb{K})
$$

bzgl. der Basis

$$
B = b_1, .., b_{r_1}, b_{r_1+1}, .., b_{r_1+r_2}, .., b_{r_1+r_2+r_3}, .., b_n
$$

Dann operiert F bzgl. der Basis

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{B} = \beta_1, .., \beta_n \\
&\beta_1 := b_{r_1}, .., \beta_{r_1} := b_1 \\
&\beta_{r_1+1} := b_{r_1+r_2}, .., \beta_{r_1+r_2} := b_{r_1+1} \\
&\vdots \\
&\beta_{r_1+..+r_{m-1}+1} := b_n, .., \beta_n := b_{r_1+..+r_{m-1}+1}
\end{aligned}
$$

als die Matrix

$$
{}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(F) = \operatorname{diag}\left((J_{r_1}(\lambda_1))^T, \dots, (J_{r_m}(\lambda_m))^T\right) = \operatorname{diag}\left(J_{r_1}(\lambda_1), .., J_{r_m}(\lambda_m)\right)^T = \left({}_BM_B(F)\right)^T = (A_J)^T
$$

Somit ist für eine beliebige Jordan-Matrix $A_J \sim (A_J)^T$.

- Sei nun $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine beliebige Matrix mit der Jordan-Form A_J, d.h

$$
\exists\, T \in M_n(\mathbb{K}) : A_J = TAT^{-1}
$$

Dann ist wegen

$$
(A_J)^T = \left(TAT^{-1}\right)^T = T^T A^T \left(T^{-1}\right)^T = T^T A^T \left(T^T\right)^{-1}
$$

auch $(A_J)^T \sim A^T$.

- Betrachten schließlich eine beliebige triangulierbare Matrix A. Diese ist ähnlich zu ihrer Jordan-Form A_J:

$$
A \sim A_J
$$

Somit ist

$$
\boxed{A \sim A_J \sim (A_J)^T \sim A^T}
$$

□

Aufgabe 03

Nennen

$$
b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}
$$

Es ist

$$
b_1 + b_2 - v + b_3 = 0 \;\rightarrow\; W = \operatorname{span}\{b_1, b_2, b_3\}
$$

und somit $\dim W^o = 2$. Suchen also 2 linear unabhängige Vektoren $a, b \in V^*$ mit

$$a(b_1) = a(b_2) = a(b_3) = b(b_1) = b(b_2) = b(b_3)$$

Setzen b_1, b_2, b_3 zu einer Basis von $V = \mathbb{R}^5$ fort:

$$b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Setzen

$$a(b_1) = a(b_2) = a(b_3) = 0 = b(b_1) = b(b_2) = b(b_3) \ , \ a(b_4) = 1 = b(b_5) \ , \ a(b_5) = b(b_4) = 0$$

und setzen linear fort. Somit sind zwei Linearformen a, b definiert, mit $a(W) = b(W) = 0$. Diese sind linear unabhängig, denn aus $\lambda a + \mu b = 0$ folgt:

$$\lambda a(b_4) + \mu b(b_4) = a = 0 \ , \ \lambda a(b_5) + \mu b(b_5) = b = 0$$

Somit bilden a, b eine Basis von W.

Aufgabe 04

Wählen eine beliebige Basis $b_1, .., b_4$ des $V = \mathbb{R}^4$ (z.B die kanonische Basis). Konstruieren damit eine neue Basis gemäß

$$c_1 := b_1 \ , \ c_2 := b_2 + b_1 \ , \ c_3 := b_3 \ , \ c_4 := b_4$$

Doch für die Linearformen

$$b_1^*(b_i) = \begin{cases} 1 & : i = 1 \\ 0 & : i \neq 1 \end{cases} \ , \ c_1^*(c_i) = \begin{cases} 1 & : i = 1 \\ 0 & : i \neq 1 \end{cases}$$

ist

$$c_1^*(c_2) = 0 \neq 1 = b_1^*(b_2 + b_1) = b_1^*(c_2)$$

und somit $b_1^* \neq c_1^*$.

Aufgabe 05

a) Der Vektorraum P_n ist ein $n+1$-dimensionaler Raum mit der Basis

$$b_i(X) = X^i \ , \ i = 0, ..., n$$

Somit ist auch der Dualraum P_n^* $n+1$ dimensional. Insbesondere ist P_2^* 3-dimensional, so dass es genügt die lineare Unabhängigkeit der Vektoren $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2 \in P_2^*$ zu zeigen. Sei also

$$\alpha_0 \varphi_0 + \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 = 0$$

Dann ist insbesondere

$$0 = \alpha_0 \varphi_0(X - X^2) + \alpha_1 \varphi_1(X - X^2) + \alpha_2 \varphi_2(X - X^2) = -2\alpha_2 \ \rightarrow \ \alpha_2 = 0$$

$$0 = \alpha_0 \varphi_0(1 - X) + \alpha_1 \varphi_1(1 - X) + \alpha_2 \varphi_2(1 - X) = \alpha_0$$

$$0 = \alpha_0 \varphi_0(1) + \alpha_1 \varphi_1(1) + \alpha_2 \varphi_2(1) = \alpha_1$$

weshalb $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ linear unabhängig sind und somit eine Basis von P_2^* bilden.

b) Suchen im Endeffekt Polynome p_0, p_1, p_2 2. Grades so dass

$$\delta_{ij} = \varphi_i(p_j) = p_j(i) \ , \ i, j = 0, 1, 2$$

ist. Diese sind automatisch linear unabhängig (und somit eine Basis von P_2) denn aus

$$\sum_{i=0}^{2} \alpha_i p_i = 0$$

folgt

$$0 = \varphi_i \left(\sum_{j=0}^{2} \alpha_j p_j \right) = \sum_{j=0} \alpha_j \delta_{ij} = a_i$$

Es ergibt sich

$$p_0(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{3}{2}X + 1 \ , \ p_1(X) = -X^2 + 2X \ , \ p_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$$

c) Verwenden als Basis für P_2^* die Dualbasis zur Basis $1, X, X^2$. Untersuchen also was d^* aus den Basisvektoren

$$(1^*), (X^*), (X^{2^*}) \in P_2^*$$

macht: Sei $f \in P_3$. Dann ist

$$d^*(1^*)(f) = (1^*)\,(f') \cong (X^*)(f)$$

$$d^*(X^*)(f) = (X^*)(f') \cong 2(X^{2^*})(f)$$

$$d^*(X^{2^*})(f) = (X^{2^*})(f') \cong 3(X^{3^*})(f)$$

so dass sich die Matrix A_{d^*} von d^* ergibt

$$A_{d^*} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Anhang

Zwischensatz 01: Ist $b_1, ..., b_n$ eine Basis des Vektorraumes V und $U \leq V$ ein Unterraum, mit

$$b_1, .., b_m \in U \ , \ b_{m+1}, .., b_n \notin U$$

dann ist $\dim U = m$.
Beweis:

$$b_1, .., b_m \in U \ \rightarrow \ \dim U \geq m$$

$$U \cap \operatorname{span}\{b_{m+1}, .., b_n\} = \{0\} \ \rightarrow \ \dim U \oplus \operatorname{span}\{b_{m+1}, .., b_n\} = \dim U + (n - m) \leq n \ \rightarrow \ \dim U \leq m$$

$$\rightarrow \ \dim U = m \quad \square$$