Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 — Übungsblatt 9

Abgabe am Do 14.06. in der Vorlesung. Wenn nichts anderes gesagt wird, ist V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum.

Aufgabe 1: (4 BP.) Zeigen Sie: zwei triangulierbare Endomorphismen F, G von V haben genau dann die gleiche Jordansche Normalform, wenn

$$\dim \operatorname{Kern}(F - \lambda \operatorname{Id})^m = \dim \operatorname{Kern}(G - \lambda \operatorname{Id})^m$$

gilt für alle $m \geq 1$ und für alle $\lambda \in k$.

Aufgabe 2: (3 P.) Sei $A \in M_n(k)$ eine triangulierbare Matrix. Zeigen Sie, dass A und A^T die gleiche Jordansche Normalform haben und ähnlich sind.

(*) Geben Sie zwei verschiedene Beweise an, wobei einer das Ergebnis von Aufgabe 1 benutzen sollte.

Aufgabe 3: (4 P.) Sei $W \subseteq \mathbb{R}^5$ der Unterraum, der von den Vektoren $(0, 1, 2, 0, 1)$, $(1, 1, 1, -1, 0)$, $(1, 3, 2, 1, -1)$ und $(0, 1, -1, 2, -2)$ aufgespannt wird. Berechnen Sie eine Basis des Annulators W°.

Aufgabe 4: (3 P.) Geben Sie zwei Basen b_1, b_2, b_3, b_4 und c_1, c_2, c_3, c_4 des $\mathbb{R}^4$ an, derart, dass $b_1 = c_1$ und $b_3 = c_3$ gelten, aber für die Dualbasen ist $b_1^* \neq c_1^*$.

Aufgabe 5: Sei $P_n \subseteq \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

a) (3 P.) Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\phi_a \colon P_2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung $\phi_a(p) = p(a)$. Zeigen Sie, dass ϕ_1, ϕ_0 und ϕ_2 eine Basis des Dualraums $(P_2)^*$ bilden.

b) (3 P.) Finden Sie eine Basis des P_2 derart, dass ϕ_1, ϕ_0, ϕ_2 die entsprechende Dualbasis ist.

c) (4 BP.) Bekanntlich ist die erste Ableitung $d \colon P_n \to P_{n-1}$, $f(X) \mapsto f'(X)$ eine lineare Abbildung. Berechnen Sie die Matrix der dualen Abbildung $d^* \colon (P_2)^* \to (P_3)^*$. Nehmen Sie als Basis von $(P_3)^*$ die Dualbasis zur Basis $1, X, X^2, X^3$ von P_3.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16