Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 08 - Lösungen

Stilianos Louca

6. April 2008

Aufgabe 01

Die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \ , \ \lambda \neq 0$$

haben das charakteristische Polynom

$$p_A(X) = p_B(X) = (X - \lambda)^4$$

und das Minimalpolynom

$$\mu_A(X) = \mu_B(X) = (X - \lambda)^2$$

Jedoch ist

$$\dim E_\lambda(A) = 3 \neq 2 = \dim E_\lambda(B)$$

Man kann also im allgemeinen Fall <u>nicht</u> die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts von dem charakteristischen Polynom und dem Minimalpolynom ablesen!

Aufgabe 02

Seien $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ zwei solche, den Endomorphismen F_A, F_B entsprechenden Matrizen. Da diese triangulierbar sind können sie (aufgrund der Transitivität der Ähnlichkeitsrelation) insbesondere auch in Jordanscher Normalform geschrieben werden. Achten wir darauf dass:

- Beide Matrizen aus Jordan Kästchen (JK) zu den gleichen Eigenwerten bestehen
- Die Summen der Größen der JK zu gleichen Eigenwerten in beiden Matrizen gleich sind
- Die Größe des größten JK zu beliebigem Eigenwert λ in beiden Matrizen gleich ist
- Die Anzahl der JK zu beliebigem Eigenwert λ in beiden Matrizen gleich ist

so ist dies äquivalent zur Erfüllung der 3 Stichpunkte. Achten wir darauf dass trotz alle dem die Jordan-Formen (auch nach Umordnung der JK) unterschiedlich sind, so sind die Matrizen nicht ähnlich (folgt aus der Tatsache dass ähnliche Matrizen gleiche Jordan-Form haben).
Ferner können wir uns auf Matrizen mit nur einem Eigenwert λ beschränken, denn obere Betrachtungen gelten für jede *Art* von JK (d.h für jeden unterschiedlichen Eigenwert) separat. Somit könnten wir eine *gemischte* Matrix um die restlichen JK kürzen und nur den Teil mit der *interessanten* (d.h unter den beiden Matrizen unterschiedlichen) JK-Sorte behalten.
Suchen also Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ mit dem Eigenwert λ, gleicher Anzahl an JK und gleichem *grösten* JK, mit trotzdem

unterschiedlicher Jordan-Form. Dies funktioniert erst ab 3 JK bzw. $n = 7$, z.B mit

$$A = \begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_3(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} J_2(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & J_2(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & J_3(\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Aufgabe 03

Da charakteristische Polynom p_A der Matrix ist gegeben durch

$$p_A(X) = (X-4)^3 \cdot (X+2)^3 \cdot (X-1) \cdot (X-3)$$

woraus man sofort die Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3,\ \lambda_4 = 4$$

ablesen kann. Da p_A ferner als Produkt linearer Faktoren darstellbar ist, ist A auf jeden Fall triangulierbar und somit auch auf Jordanscher Normalform zu bringen. Die Jordan-Kästchen (JK) der Eigenwerte $1, 3$ sind von der Menge und der Größe her jeweils 1. Zu Untersuchen wäre die geometrische Vielfachheit der Eigenwerte $4, -2$. Es ergibt sich

$$\dim E_4(A) = 2\ ,\ \dim E_{-2} = 1$$

d.h es gibt 1 JK zum Eigenwert -2 und 2 JK zum Eigenwerte 4. Die Summe der Größen der JK zu einem Eigenwert λ sind gleich seiner algebraischen Vielfachheit. Somit gibt es genau 2 JK jeweils der Größe 1 und 2 zum Eigenwert 4 und 1 JK der Größe 3 zum Eigenwert -2. Somit ergibt sich die Jordansche-Normalform von A als

$$A_J = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 04

Sei F der durch A induzierte Endomorphismus $F : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$.
Berechnen eine Basis für jeden Eigenraum von A:

$$E_2(A) = \operatorname{span}\{(e_1 - e_4 + e_7)\}\ ,\ E_1(A) = \operatorname{span}\{(e_7 - e_4), (e_5 + e_6 - e_2)\}\ ,\ E_{-1}(A) = \operatorname{span}\{(e_6 - e_2)\}$$

Betrachten den Hauptraum $H_1(A)$: Es ist

$$(A-I)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rang}(A-I)=5 \ \rightarrow \ \dim\mathrm{kernel}(A-I)=2$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & -4 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & -4 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -4 & 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rang}(A-I)^2=4 \ \rightarrow \ \dim\mathrm{kernel}(A-I)^2=3$$

$$(A-I)^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -6 & 12 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & -12 & 8 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 12 & -8 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}, \ \mathrm{rang}(A-I)^3=4 \ \rightarrow \ \dim\mathrm{kernel}(A-I)^3=3$$

Somit ist $d_1=2$ das kleinste d_1 so dass

$$H_1(A)=\mathrm{kernel}(A-I)^{d_1}$$

ist. Betrachten den Hauptraum $H_{-1}(A)$. Es ist

$$(A+I) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A+I) = 6 \ \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A+I) = 1$$

$$(A+I)^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & -4 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A+I)^2 = 5 \ \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A+I)^2 = 2$$

$$(A+I)^3 = \begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19 & 12 & 0 & 8 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 & 0 \\ 19 & -12 & 0 & -8 & 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A+I)^3 = 4 \ \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A+I)^3 = 3$$

$$(A+I)^4 = \begin{pmatrix} 81 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -65 & 32 & 0 & 16 & 0 & 32 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & 16 & 16 & 0 \\ 65 & -32 & 0 & -16 & 0 & -32 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A+I)^4 = 4 \ \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A+I)^4 = 3$$

Somit ist $d_{-1} = 3$ das kleinste d_{-1} so dass

$$\operatorname{kernel}(A+I)^{d_{-1}} = H_{-1}(A)$$

ist.

Betrachten den Eigenraum $E_2(A)$:

$$(A-2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A-2I) = 6 \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A-2I) = 1$$

$$(A-2I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & -6 & 8 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 6 & -8 & 1 & 6 \\ -1 & 2 & -6 & 8 & 0 & 2 & 9 \end{pmatrix}, \ \operatorname{rang}(A-2I)^2 = 6 \ \rightarrow \ \dim\operatorname{kernel}(A-2I)^2 = 1$$

Somit ist $d_2 = 1$ das kleinste d_2 so dass

$$\operatorname{kernel}(A-2I)^{d_2} = H_2(A)$$

ist.
Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts λ im charakteristischen Polynom $p_A(X)$ entspricht genau der Dimension des Hauptraumes $H_\lambda(A)$. Somit können wir sofort das charakteristische Polynom aufschreiben

$$\boxed{p_A(X) = (X-1)^3 \cdot (X+1)^3 \cdot (X-2)}$$

Da das Minimalpolynom μ_A das charakteristische Polynom teilt, ist es auch ein Produkt von linearen Faktoren, die natürlich alle in p_A auftauchen. Die algebraische Vielfachheit jeder Nullstelle λ ist gleich der kleinsten Zahl d_λ für die gilt

$$\text{kernel}(A - \lambda I)^{d_\lambda} = H_\lambda(A)$$

Diese Zahlen wurden bereits berechnet, so dass wir sofort schreiben können:

$$\boxed{\mu_A(X) = (X-1)^2 \cdot (X+1)^3 \cdot (X-2)}$$

Analog zu Aufgabe (03) können wir aus den geometrischen & algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte die Jordansche Normalform ablesen:

$$A_J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wegen $H_\lambda(A) = \text{kernel}(A - \lambda I)^{d_\lambda}$ haben wir eine direkte Methode zur Berechnung einer Basis eines Hauptraumes. Es ergibt sich

$$H_1(A) = \text{span}\{e_6,\ (e_7 - e_4),\ (e_5 - e_2)\}$$

$$H_{-1}(A) = \text{span}\{e_3,\ e_7,\ (e_6 - e_2)\}$$

$$H_2(A) = \text{span}\{(e_1 - e_4 + e_7)\}$$

Durch die Werte d_λ ist zu sehen, dass es im Hauptraum $H_1(A)$ Vektoren $v_1 \in H_1(A)$ gibt, so dass $v_1, (A-I)v_1 \neq 0$ sind. Da $(A-I)$ in $H_1(A)$ Nilpotent ist, sind diese linear unabhängig. Wir erwarten also dass $H_1(A)$ sich aus der direkten Summe eines 2-dimensionalen und eines 1-dimensionalen zyklischen Raumes zusammensetzt. Analoge Überlegungen führen zur Erkenntnis, dass sich $H_{-1}(A)$ als ein einziger zyklischer, 3-dimensionaler Unterraum darstellen lässt. Ähnlich besteht dann $H_2(A)$ aus einem 1-dimensionalen (zyklischen) Raum (jeder Vektor $0 \neq v \in H_2(A)$ würde hier als *Erzeuger* genügen). Somit ist z.B

$$(A-I) \cdot e_6 = (e_4 - e_7)\ ,\ (A-I)^2 \cdot e_6 = 0\ ,\ (A-I) \cdot (e_5 - e_2 + e_6) = 0$$

$$\Rightarrow\ H_1(A) = \text{span}\{(e_5 - e_2 + e_6)\} \oplus \text{span}\{e_6,\ (A-I)e_6\} = Z_{(A-I)}(e_5 - e_2 + e_6) \oplus Z_{(A-I)}(e_6)$$

$$(A+I) \cdot e_3 = e_7\ ,\ (A+I)^2 \cdot e_3 = (e_2 - e_6)\ \Rightarrow\ H_{-1}(A) = Z_{(A+I)}(e_3)$$

$$H_2(A) = Z_{(A-2I)}(e_1 - e_4 + e_7)$$

Somit ist

$$\mathbb{R}^7 = H_2(A) \oplus H_1(A) \oplus H_{-1}(A) = Z_{(A-2I)}(e_1 - e_4 + e_7) \oplus Z_{(A+I)}(e_3) \oplus Z_{(A-I)}(e_5 - e_2 + e_6) \oplus Z_{(A-I)}(e_6)$$

Wählen für jeden r-dimensionalen Zyklischen Raum $Z_{(F-\lambda I)}(v)$ die Basis

$$b_1 := (F - \lambda I)^{r-1} v\ ,\ b_2 := (F - \lambda I)^{r-2} v\ , \ldots,\ b_r := v$$

so wirkt F auf diese als die Matrix $J_r(\lambda)$. Somit wirkt F auf die Basis

$$\begin{aligned}
b_1 &:= (e_1 - e_4 + e_7)\\
b_2 &:= (e_2 - e_6)\\
b_3 &:= e_7\\
b_4 &:= e_3\\
b_5 &:= (e_5 - e_2 + e_6)\\
b_6 &:= (e_4 - e_7)\\
b_7 &:= e_6
\end{aligned}$$

als die schon erstellte Jordan-Matrix A_J.