Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 — Übungsblatt 8

Abgabe am Do 07.06. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: (2 P.) Geben Sie zwei quadratische Matrizen A, B an, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen:

- die charakteristischen Polynome sind gleich, d.h. $p_A(X) = p_B(X)$;
- die Minimalpolynome sind gleich, d.h. $m_A(X) = m_B(X)$; aber
- es gibt einen gemeinsamen Eigenwert λ, dessen geometrischen Vielfachheiten – als Eigenwert von A und als Eigenwert von B – verschieden sind.

Kann man im allgemeinen Fall die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts von dem charakteristischen Polynom und vom Minimalpolynom ablesen?

Aufgabe 2: (4 P.) Geben Sie zwei triangulierbare Matrizen A, B an, die die folgenden drei Eigenschaften erfüllen und trotzdem nicht ähnlich sind:

- die charakteristischen Polynome sind gleich, d.h. $p_A(X) = p_B(X)$;
- die Minimalpolynome sind gleich, d.h. $m_A(X) = m_B(X)$; und
- für jeden gemeinsamen Eigenwert stimmen die geometrischen Vielfachheiten – als Eigenwert von A und als Eigenwert von B – überein.

(*) Versuchen Sie, die *kleinste* Lösung zu finden.

Aufgabe 3: (5 BP.) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M_8(\mathbb{R}) .$$

Um die volle Punktzahl zu erhalten, müssen Sie nicht eine Basis finden, die die Matrix auf Jordansche Normalform bringt.

Bitte wenden

Aufgabe 4: (10 P.) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -2 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_7(\mathbb{R})$$

ist triangulierbar, und die Eigenwerte sind $1, -1, 2$. Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix; alle Haupträume; die Polynome $p_A(X), m_A(X)$; sowie eine Basis B des $\mathbb{R}^7$, die A auf Jordansche Normalform bringt.

Hinweis: Berechnen Sie zuerst eine Basis von jedem Hauptraum. Dann zerlegen Sie den Hauptraum zum Eigenwert λ als eine direkte Summe von zyklischen Moduln für den Endomorphismus $F - \lambda\,\mathrm{Id}$, der nilpotent auf den Hauptraum operiert. So können Sie eine Basis der gesuchten Sorte erhalten. Eventuell haben Sie schon früher die Jordansche Normalform berechnet.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16