Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 07 - Lösungen

Stilianos Louca

4. April 2008

Aufgabe 01

Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Ein Vektor $v \in V$ ist ein Erzeuger des Vektorraumes: $V = Z_F(v)$ genau dann wenn

$$\underbrace{v}_{b_1}, \underbrace{Fv}_{b_2}, ..., \underbrace{F^{n-1}v}_{b_n}$$

eine Basis von V bilden, d.h linear unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\det \begin{pmatrix} - & b_1 & - \\ - & b_2 & - \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ - & b_n & - \end{pmatrix} \neq 0$$

ist.

a) $V = \mathbb{R}^2$ ist zyklisch bzgl. F, mit dem Erzeuger $(1,1)$:

$$\mathbb{R}^2 = Z_F(1,1) = \operatorname{span}\{(1,1),\ F(1,1)\} = \operatorname{span}\{(1,1),\ (2,3)\}$$

b) $V = \mathbb{R}^3$ ist nicht zyklisch. Sei nämlich

$$v := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ein Erzeuger von $\mathbb{R}^3$, d.h

$$b_1 := v,\ b_2 := Fv = \begin{pmatrix} a+2b \\ 5b \\ 5c \end{pmatrix},\ b_3 := F^2v = \begin{pmatrix} a+12b \\ 25b \\ 25c \end{pmatrix}$$

bilden eine Basis und sind somit linear unabhängig. Doch es ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ a+2b & 5b & 5c \\ a+12b & 25b & 25c \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ -4a & 0 & 0 \\ 12b-24a & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

was ein Widerspruch ist! Somit kann $V = \mathbb{R}^3$ von F nicht zyklisch erzeugt werden!

Aufgabe 02

Durch direktes Ausrechnen ergibt sich

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; A^3 = 0$$

Somit ist A nilpotent. Rechnen zuerst eine Basis des (7-dimensionalen) kernel A^2 aus:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und setzen diese zu einer Basis von $\mathbb{R}^8$ fort:

$$b_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$$

so dass wir eine Basis des (1-dimensionalen) Quotientenraums $\mathbb{R}^8 / \operatorname{kernel} A^2$ bilden können:

$$\mathbb{R}^8 / \operatorname{kernel} A^2 = \operatorname{span}\left\{ b_8 + \operatorname{kernel} A^2 \right\}$$

und gleich einen ersten Ansatz für einen zyklischen Unterraum haben:

$$Ab_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; A^2 b_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad Z_A(b_8) = Z_A(e_2) = \operatorname{span}\left\{ e_2, Ae_2, A^2 e_2 \right\}$$

Da rang $A^2 = \dim \operatorname{image} A^2 = 1$ ist, kann in der direkten Summe von zyklischen Unterräumen

$$\mathbb{R}^8 = \cdots \oplus Z_A(v_1) \oplus \cdots \oplus Z_A(v_2) \oplus \ldots$$

nur ein 3-dimensionaler Auftreten (da sonst $A^2 v_1$ und $A^2 v_2$ linear abhängig wären).
Wir brauchen also noch Unterräume für 5 Dimensionen, die maximal 2-dimensional sein dürfen. Ist ferner

$$Z_A(v) = \operatorname{span}\{v, Av\}$$

ein solcher 2-dimensionaler zyklischer Unterraum, so liegt $Av \in \operatorname{kernel} A$.
Schaffen wir es also, noch 2 Vektoren $v_1, v_2 \notin \operatorname{kernel} A$ zu finden, mit

$$\dim Z_A(v_1) = \dim Z_A(v_2) = 2$$

so können wir eventuell die letzte *Dimensionslücke* mit einem weiteren Vektor $v \in \operatorname{kernel} A$ füllen, denn es wäre

$$Z_A(v) = \operatorname{span}\{v\}$$

Zu beachten wäre jedoch stets die lineare Unabhängigkeit! Versuchen es mit $v_1 := (e_1 + e_2 + e_8)$:

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ A^2 v_1 = 0 \ \rightarrow \ Z_A(v_1) = \operatorname{span}\{v_1, Av_1\}$$

und mit $v_2 := (e_3 + e_7)$:

$$Av_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ A^2 v_2 = 0 \ \rightarrow \ Z_A(v_2) = \operatorname{span}\{v_2, Av_2\}$$

Durch direktes Ausrechnen zeigt sich dass tatsächlich $e_2, Ae_2, A^2e_2, v_1, Av_1, v_2, Av_2$ linear unabhängig sind. 3 von denen sind im $\operatorname{kernel} A$, so dass wir eine Chance haben einen weiteren Vektor $v_3 \in \operatorname{kernel} A$ zu finden um die Summe durch $Z_A(v_3) = \operatorname{span}\{v_3\}$ zu vervollständigen! Berechnen eine Basis für $\operatorname{kernel} A$:

$$c_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ c_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ c_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ c_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

probieren $c_4 \in \operatorname{kernel} A$ und sehen dass dieser keine Linearkombination der eben erwähnten Vektoren ist. Somit ist

$$\mathbb{R}^8 = \operatorname{span}\left\{e_2, Ae_2, A^2e_2, v_1, Av_1, v_2, Av_2, c_4\right\} = \operatorname{span}\{e_2, Ae_2, Ae_3\} \oplus \operatorname{span}\{v_1, Av_1\} \oplus \operatorname{span}\{v_2, Av_2, c_4\} \oplus \operatorname{span}\{c_4\}$$

$$= Z_A(e_2) \oplus Z_A(v_1) \oplus Z_A(v_2) \oplus Z_A(c_4)$$

Aufgabe 03

Seien

$$K := \{v \in V : \exists\, m \geq 1 : F^m v = 0\} \ , \ B := \left\{v \in V : \exists\, m \geq 1 : \forall\, k \geq m : v \in \operatorname{image} F^k\right\}$$

die *Gipfel* der schon erwähnten Türme. Es gilt stets

$$\operatorname{kernel} F^k \leq \operatorname{kernel} F^{k+1} \leq K \leq V$$

$$V \geq \operatorname{image} F^k \geq \operatorname{image} F^{k+1} \geq B$$

a) Sei $\text{image}\,F^{k+1} = \text{image}\,F^k$ für ein $k \geq 1$. Falls $\text{image}\,F^k = \{0\}$ sind wir fertig, denn dann ist $F^k = \{0\} = B$. Betrachten also den Fall $\text{image}\,F^k > \{0\}$ und wählen ein beliebiges $0 \neq v \in \text{image}\,F^k$. Somit ist auch $v \in \text{image}\,F^{k+1}$. **Annahme:** $v \notin \text{image}\,F^{k+2}$. Hieraus folgt

$$\nexists\ w \in \text{image}\,F^{k+1} : F(w) = v$$

$$\rightarrow\ \nexists\ w \in \text{image}\,F^k : F(w) = v$$

$$\rightarrow\ v \notin \text{image}\,F^{k+1}$$

was ein Widerspruch ist. Somit gilt die Implikation

$$v \in \text{image}\,F^k \ \Rightarrow\ v \in \text{image}\,F^{k+2}$$

was so viel bedeutet wie $\text{image}\,F^k \subset \text{image}\,F^{k+2}$. Somit ist

$$\text{image}\,F^k = \text{image}\,F^{k+2}$$

Durch Induktion über k lässt sich somit zeigen

$$\forall\ m \geq k : \text{image}\,F^m = \text{image}\,F^k \quad \square$$

b) Sei $\text{kernel}\,F^k = \text{kernel}\,F^{k+1}$. Falls $\text{kernel}\,F^k = V$ ist, sind wir fertig, denn $K \leq V$ also $\text{kernel}\,F^k = K$. Betrachten also den Fall $\text{kernel}\,F^k < V$ und wählen ein beliebiges $v \in V$ mit $F^k v \neq 0$. Somit ist auch $F^{k+1}v \neq 0$. **Annahme:** $F^{k+2}v = 0$. Dann ist

$$F^{k+1}\left[Fv\right] = 0 \ \rightarrow\ Fv \in \text{kernel}\,F^{k+1}$$

und somit

$$Fv \in \text{kernel}\,F^k \ \rightarrow\ F^{k+1}v = 0$$

was ein Widerspruch ist! Demnach ist für alle $v \in V$:

$$v \notin \text{kernel}\,F^k \ \Rightarrow\ v \notin \text{kernel}\,F^{k+2}$$

$$\rightarrow\ F^{k+2} \subset F^k$$

also

$$\text{kernel}\,F^{k+2} = \text{kernel}\,F^k$$

Durch Induktion über k zeigt sich also

$$\forall\ m \geq k : \text{kernel}\,F^m = \text{kernel}\,F^k$$

Variante: Durch die Dimensionsformel

$$\dim \text{kernel}\,F^k + \dim \text{image}\,F^k = \dim V = n : \mathit{const}$$

Ist $\text{kernel}\,F^k = \text{kernel}\,F^{k+1}$, so folgt

$$\dim \text{image}\,F^k = \dim \text{image}\,F^{k+1}$$

Wegen $\text{image}\,F^{k+1} \leq \text{image}\,F^k$ ist somit

$$\text{image}\,F^k = \text{image}\,F^{k+1}$$

Doch durch Teil (a) weis man dass somit ab nun $\text{image}\,F^k$ konstant bleibt. Somit bleibt auch $\dim \text{kernel}\,F^k$ konstant. Wegen

$$\text{kernel}\,F^m \leq \text{kernel}\,F^{m+1}\ \forall\ m$$

folgt somit dass der gesamte $\text{kernel}\,F^k$ konstant bleibt:

$$\forall\ m \geq k : \text{kernel}\,F^m = \text{kernel}\,F^k \quad \square$$

c) Wir haben durch den vorigen Beweis gesehen dass kernel F^k genau dann konstant bleibt wenn image F^k konstant bleibt. Wir wissen außerdem dass es immer ein $m \in \mathbb{N}$ gibt so dass

$$\forall\ k \geq m : \operatorname{kernel} F^k = \operatorname{kernel} F^m = K$$

ist. Sei $m \in \mathbb{N}$ das **kleinste** solche m. Falls $m = 1$ ist sind wir fertig da $n \geq 1$. Betrachten also den Fall $m \geq 2$. Dann ist

$$n \geq \dim \operatorname{kernel} F^m = \dim \operatorname{kernel} F^1 + \underbrace{\left(\dim \operatorname{kernel} F^2 - \dim \operatorname{kernel} F^1\right)}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{\left(\dim \operatorname{kernel} F^m - \dim \operatorname{kernel} F^{m-1}\right)}_{\geq 1}$$

$$\geq \dim \operatorname{kernel} F^1 + m - 1$$

Falls $\dim \operatorname{kernel} F^m = 0$ ist, so ist notwendigerweise $m = 1$ und wir sind fertig.
Betrachten also den Fall $\dim \operatorname{kernel} F^m \geq 1$. Wir haben in der vorigen Übungsserie gesehen, dass dies auch

$$\dim \operatorname{kernel} F \geq 1$$

impliziert. Somit ist

$$m \leq n + 1 - \underbrace{\dim \operatorname{kernel} F}_{\geq 1} \leq n \quad \square$$

Aufgabe 04

Sei

$$p(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \ , \ a_k \in \mathbb{K}$$

das betrachtete Polynom. Dann ist

$$F \circ G = F \circ \sum_{k=0}^{m} a_k F^k \overset{*}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k \underbrace{F F^k}_{F^{k+1}} \overset{**}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k F^k F = \left[\sum_{k=0}^{m} a_k F^k\right] F = G \circ F$$

$(*)$: F linear
$(**)$: $\circ$ assoziativ

$\square$