Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 07 — Übungsblatt 7

Aufgabe 1: Ist der Vektorraum V zyklisch bzgl. des Endomorphismus F? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) (3 P.) $V = \mathbb{R}^2$, und F hat Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

b) (3 P.) $V = \mathbb{R}^3$, und F hat Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{smallmatrix}\right)$.

(*) Falls zyklisch: Wann genau ist ein Element von V ein Erzeuger?

Aufgabe 2: (10 P.) Sei $A \in M_8(\mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & -1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A nilpotent ist, und zerlegen Sie $\mathbb{R}^8$ als eine direkte Summe von Unterräumen, die bezüglich A zyklisch sind.

Aufgabe 3: Sei F ein Endomorphismus des n-dimensionalen k-Vektorraums V. Nach dem Fitting-Lemma bilden die $\mathrm{Kern}(F^r)$ bzw. die $\mathrm{Bild}(F^r)$ einen aufsteigenden bzw. absteigenden Turm von invarianten Unterräumen. Zeigen Sie:

a) (3 BP.) Gilt $\mathrm{Bild}(F^{m+1}) = \mathrm{Bild}(F^m)$ für ein $m \geq 1$, so sind beide Türme bereits ab $\mathrm{Kern}(F^m)$ bzw. $\mathrm{Bild}(F^m)$ konstant.

b) (*) Das gleiche gilt, falls $\mathrm{Kern}(F^{m+1}) = \mathrm{Kern}(F^m)$ für ein m.

c) (*) Spätestens ab $\mathrm{Kern}(F^n)$ bzw. $\mathrm{Bild}(F^n)$ sind die Türme konstant.

Aufgabe 4: (2 BP.) Sei F ein Endomorphismus des k-Vektorraums V. Sei $p(X) \in k[X]$ ein Polynom. Sei G der Endomorphismus $G = p(F)$ des V. Zeigen Sie: es ist $F \circ G = G \circ F$