Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 06 - Lösungen

Stilianos Louca

1. April 2008

Aufgabe 01

a) Die Aussage ist Wahr. Sei $v \in \operatorname{kernel} F^r$, d.h $F^r v = 0$ und $r \geq 1$. Dann ist

$$F^r\,[Gv] = F^{r-1}FGv = F^{r-1}GFv = F^{r-2}(FG)Fv = ... = G\underbrace{F^r v}_{0} = 0 \;\rightarrow\; Gv \in \operatorname{kernel} F^r$$

und somit $G(\operatorname{kernel} F^r) \subset \operatorname{kernel} F^r$. $\square$

b) Die Aussage ist Falsch. Gegenbeispiel: G beliebiger Endomorphismus und U beliebiger Unterraum. Setzen $F = 0$, so ist $F \circ G = G \circ F = 0$ und U ist F invariant denn $\{0\} = F(U) \in U$. Doch U und G waren beliebig, so dass U nicht allgemein G invariant ist.

c) Diese Aussage ist Wahr. Seien p_A und μ_A jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A. Da $A \in M_3(\mathbb{R})$ ist $\operatorname{grad} p_A = 3$. Wegen $\mu_A \mid p_A$ ist also

$$p_A = \lambda \cdot \mu_A \;,\;\; \lambda \in \mathbb{R}$$

Da p_A und μ_A beide normiert sind, muss $\lambda = 1$ sein, so dass folgt $p_A = \mu_A$. $\square$

d) Diese Aussage ist Wahr. Sei μ_A das Minimalpolynom und p_A das charakteristische Polynom der Matrix A. Es gilt: $\mu_A \mid p_A \;\rightarrow\; \operatorname{grad} \mu_A \leq 3$
Annahme: $\operatorname{grad} \mu_A \leq 2$:

$$\mu_A(X) = aX^2 + bX + c \;\rightarrow\; \mu_A(A) = aA^2 + bA + cI = 0$$

Die Matrix hat die Eigenwerte $0, 1, -1$ (Nullstellen des charakteristischen Polynoms p_A). Wählen also die Vektoren

$$v_0 \in E_0(A),\;\; v_1 \in E_1(A),\;\; v_{-1} \in E_{-1}(A) \quad , \quad v_0, v_1, v_{-1} \neq 0$$

und setzen ein:

$$0 = \mu_A(A)v_0 = a\underbrace{A^2 v_0}_{0} + b\underbrace{Av_0}_{0} + cv_0 \;\rightarrow\; c = 0$$

$$0 = \mu_A(A)v_1 = aA^2 v_1 + bAv_1 = (a+b)v_1 \;\rightarrow\; a + b = 0$$

$$0 = \mu_a(A)v_{-1} = aA^2 v_{-1} - aAv_{-1} = a(-1)^2 v_{-1} - a(-1)v_{-1} = 2av_{-1} \;\rightarrow\; a = b = 0$$

Doch $\operatorname{grad} \mu_A \geq 1$ so dass dies ein Widerspruch ist! Somit ist $\operatorname{grad} \mu_A = 3$ und nach der gleichen Argumentation wie in (c) ist $\mu_A = p_A$. $\square$

e) Diese Aussage ist Falsch. Gegenbeispiel: Sei F ein Endomorphismus im $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit der Matrix

$$_BM_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom von F ist gegeben durch

$$p_F(X) = X(X^2 + 1)$$

so dass F als einzigen Eigenwert $\lambda = 0$ besitzt. Doch F ist nicht triangulierbar, denn p_A kann nicht als Produkt von linearen Faktoren geschrieben werden!

f) Diese Aussage ist Falsch. Bezeichnen $\overline{a} := (a + 12\mathbb{Z})$ und $\mathbb{F}_{12} := \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ mit den gleichen Regeln wie in früheren Übungsserien eingeführt.
Gegenbeispiel: Sei $n = 3$. Dann gilt

$$(6 + 12\mathbb{Z})(n + 12\mathbb{Z}) = (6n + 12\mathbb{Z}) = 18 + 12\mathbb{Z} = 6 + 12\mathbb{Z} \neq 0 + 12\mathbb{Z}$$

Es gibt jedoch kein $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$(a + 12\mathbb{Z})(3 + 12\mathbb{Z}) = 1 + 12\mathbb{Z}$$

Direktes Ausprobieren aller 12 Elemente von $\mathbb{F}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ verifiziert dies! $\square$

g) Diese Aussage ist Falsch. Denn das charakteristische Polynom jeder Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ kann als Produkt von linearen Faktoren geschrieben werden, so dass A immer triangulierbar ist.

h) Diese Aussage ist Wahr. Unabhängig vom unterliegenden Körper $\mathbb{K}$, ist

$$(X - 1) \cdot (X + 1) = X^2 + X - X - 1 = X^2 - 1 = p_F(X)$$

d.h p_F kann als Produkt von linearen Faktoren geschrieben werden. Somit ist F triangulierbar.

Aufgabe 02

a) Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus des n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraumes V, und F^m , $m \geq 1$ habe den Eigenwert 0, das heißt $\dim \operatorname{kernel} F^m \geq 1$. Zu zeigen ist: $\dim \operatorname{kernel} F \geq 1$, d.h 0 ist auch ein Eigenwert von F.
Fall 1: $m = 1$. Dann sind wir fertig. Sei also $m \geq 2$.
Sei $0 \neq v \in \operatorname{kernel} F^m$. Also:

$$F^m v = F\left[F^{m-1}v\right] = 0 \;\rightarrow\; F^{m-1}v \in \operatorname{kernel} F$$

Fall 2: $F^{m-1}v \neq 0$. Dann sind wir fertig, denn $0 \neq F^{m-1}v \in \operatorname{kernel} F$.
Fall 3: $F^{m-1}v = 0$. Dann gleiche Logik anwenden, diesmal für $m - 1$, bis Fall (1) oder (2) auftritt, dann fertig. $\square$

b) Am einfachsten wäre eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ mit $E_1(A) = \{0\}$ für die A^3 die Identitätsabbildung wäre. Ein Beispiel ist die Rotationsmatrix $A \in SO(2)$:

$$A := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \in SO(2)$$

die jeden Vektor um den Winkel φ dreht. Für $\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ ist $A^3 = I_2$ und somit $E_1(A) = \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 03

a) Da zwei Zeilen gleich sind, ist $\det(A) = 0$ und somit $\operatorname{rang} A < 5$, d.h $\dim \operatorname{image} A < 5$. Somit ist nach der Dimensionsformel für lineare Abbildungen $\dim \operatorname{kernel} A \geq 1$ weshalb $\lambda = 0$ ein Eigenwert mit dem Eigenraum

$$E_0(A) = \operatorname{kernel} A$$

ist. Durch Aufzählung der linear unabhängigen Zeilen von A findet man raus: $\operatorname{rang} A = 3$. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0 ergibt sich demnach als

$$\dim \operatorname{image} E_0(A) = \dim \operatorname{kernel} A = 5 - \dim \operatorname{image} A = 5 - \operatorname{rang} A = 2$$

b) Es ist

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

wobei sofort zu sehen ist

$$\operatorname{rang} A^2 = 2 \ \rightarrow \ \dim \operatorname{kernel} A^2 = 3$$

Ein Basis des Nullraums von A^2 ist sofort abzulesen, indem man 3 linear unabhängige Vektoren $b_2, b_3, b_4 \in \operatorname{kernel} A^2$ sucht. Beispielsweise:

$$b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Achten Sie nicht zu sehr auf die (anscheinend willkürliche) Indizierung der Basisvektoren.
Es ist ferner

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

woraus man auch wieder ablesen kann

$$\operatorname{rang} A^3 = 2 \ \rightarrow \ \dim \operatorname{kernel} A^3 = 3 = \dim \operatorname{kernel} A^2$$

Somit ist $\operatorname{kernel} A^2$ gleich dem Hauptraum $H_A(0)$ von A bzgl. $\lambda = 0$:

$$\operatorname{kernel} A^2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^5 : \exists\, m \geq 1 : (A - 0I_5)^m v = 0 \right\}$$

Dies wurde in Übungsserie 05 - Zusatzaufgabe bewiesen. Doch die Dimension des Hauptraumes $H_A(0)$ ist identisch der algebraischen Vielfachheit von $\lambda = 0$, und diese ist genau 3.
Variante: Setzen b_1, b_2, b_3 zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ fort:

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ b_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und berechnen die Matrix ${}_BM_B(F)$ des durch die Matrix A induzierten Endomorphismus F:

$$\tilde{A} := {}_BM_B(F) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Deren charakteristisches Polynom $p_{\tilde{A}}$ ist gegeben durch

$$p_{\tilde{A}}(X) = \det\left(\tilde{A} - XI_5\right) = X \cdot \det \begin{pmatrix} X - 1/2 & 0 & 0 & -5/2 \\ -1 & X & 0 & -3 \\ -1/2 & 0 & X & -1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & X + 1/2 \end{pmatrix} = X^3 \cdot \left(X^2 + 2\right)$$

woraus man sofort die Vielfachheit der Nullstelle $X = 0$ ablesen kann: diese beträgt, wie erwartet, genau 3.

c) Dieser gesuchte kernel(F^m) ist genau der Hauptraum $H_F(0)$ zum Eigenwert $\lambda = 0$. Wir haben gesehen dass

$$\dim \operatorname{kernel} F^2 = 3$$

ist. Ferner weis man

$$\operatorname{kernel} F^m \leq H_F(0)$$

und dass die Dimension von $H_F(0)$ gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda = 0$ ist, also 3. Demnach ist

$$\operatorname{kernel} F^2 = H_F(0)$$

und kernel F^2 ist somit genau dieser gesuchte Kern. Gleichzeitig ist also auch image F^2 dieses gesuchte Komplement.
Bemerkung: Da ferner $\dim \operatorname{kernel} F^1 = 2 < \dim H_F(0)$ ist, ist $m = 2$ zugleich das *kleinste* die Bedingungen erfüllende $m \in \mathbb{N}$.
Eine Basis für kernel F^2 wurde bereits angegeben. Da $\dim \operatorname{image} F^2 = 2$ ist, genügt es zwei linear unabhängige Vektoren $c_1, c_2 \in \operatorname{image} F^2$ zu finden. Setzen als Versuch e_1, e_3 in F^2 ein:

$$c_1 := F^2(e_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 := F^2(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sehen dass $c_1, c_2 \in \operatorname{image} F^2$ linear unabhängig sind, und somit eine Basis für image F^2 bilden.

d) Suchen eine Basis $B = b_1, .., b_5$, so dass

$$\mathcal{B} :=_B M_B(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$$

ist. Da $\dim \operatorname{kernel} F = 2$ ist, liegt es nahe eine Basis zu suchen, mit $b_1, b_3 \in \operatorname{kernel} F$. Dies bewirkt schon mal dass die 1. und 3. Spalte von $\mathcal{B}$ identisch 0 sind. Ferner sollte $F(b_2) = b_1$ sein, so dass die 2. Spalte von $\mathcal{B}$ identisch e_1 ist. Suchen jedoch noch 2 Basisvektoren b_4, b_5 für die gilt:

$$F(b_4), F(b_5) \in \operatorname{span}\{b_4, b_5\}$$

Mit anderen Worten spannen b_4, b_5 einen invarianten Unterraum auf. Angesichts dieser Überlegungen, wenden wir uns dem Ergebnis von Teil (c). Dort hatten wir zwei invariante Unterräume gefunden deren direkte Summe $\mathbb{R}^5$ bildet:

$$\operatorname{kernel} F^2 \oplus \operatorname{image} F^2 = \mathbb{R}^5$$

Wählen also $b_4 := c_1, b_5 := c_2$ (Basis von image F^2) so dass die Voraussetzungen an b_4, b_5 automatisch erfüllt sind. Ferner erlaubt uns die Tatsache

$$\operatorname{kernel} F < \operatorname{kernel} F^2$$

die Vektoren $b_1, b_3 \in \operatorname{kernel} F$ so zu wählen, dass auch $b_1, b_3 \in \operatorname{kernel} F^2$ ist.
Eine Basis für kernel F bekommt man z.B durch lösen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = 0$:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man sieht leicht dass für

$$b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

die Beziehung $F(b_2) = b_1$ gilt und auch glücklicherweise $b_2 \in \operatorname{kernel} F^2$ ist! Somit spannen b_1, b_2, b_3 den gesamten kernel F^2 auf und bilden zusammen mit b_4, b_5 eine Basis für $\mathbb{R}^5$, die die gewünschte Bedingung erfüllt. $\square$