Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 6

Abgabe am Do 24.05. in der Vorlesung. Meistens ist k ein Körper, V ein n-dimensionaler Vektorraum, F ein Endomorphismus des V, und $A \in M_n(k)$ eine Matrix.

Aufgabe 1: Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründung, bitte!

a) (1 BP.) Sind F, G zwei Endomorphismen des V derart, dass $F \circ G = G \circ F$ gilt, so ist $\mathrm{Kern}(F^r)$ ein G-invarianter Unterraum für jedes $r \geq 1$.

Erläuterung: Ein Unterraum $U \subseteq V$ heißt G-invariant, falls $G(U) \subseteq U$ gilt.

b) (2 P.) Sind F, G zwei Endomorphismen des V derart, dass $F \circ G = G \circ F$ gilt, so ist jeder F-invarianter Unterraum von V gleichzeitig G-invariant.

c) (1 P.) Ist $A \in M_3(\mathbb{R})$ eine Matrix mit Minimalpolynom $X^3 - X$, so ist $X^3 - X$ auch das charakteristisches Polynom von A.

d) (1 BP.) Ist $A \in M_3(\mathbb{R})$ eine Matrix mit charakteristisches Polynon $X^3 - X$, so ist $X^3 - X$ auch das Minimalpolynom von A.

e) (1 BP.) Jeder Endomorphismus F, der mindestens einen Eigenwert besitzt, ist triangulierbar.

f) (2 P.) Im Restklassenring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ gilt: ist $(6 + 12\mathbb{Z})(n + 12\mathbb{Z}) \neq 0 + 12\mathbb{Z}$, so gibt es eine Restklasse $a + 12\mathbb{Z}$ mit $(a + 12\mathbb{Z})(n + 12\mathbb{Z}) = 1 + 12\mathbb{Z}$.

g) (1 P.) Es gibt Matrizen $A \in M_4(\mathbb{C})$, die nicht triangulierbar sind.

h) (2 BP.) Egal, um welchen Körper es sich handelt: ist $p_F(X) = X^2 - 1$, so ist F triangulierbar.

Aufgabe 2: In der Vorlesung wurde behauptet: ist 0 ein Eigenwert von A^3, so ist 0 auch ein Eigenwert von A.

a) (2 P.) Weisen Sie dies nach.

b) (2 P.) Finden Sie eine Matrix $A \in M_2(\mathbb{R})$ derart, dass 1 ein Eigenwert von A^3 aber nicht von A ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3: Betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_5(\mathbb{R}) \,.$$

a) (2 P.) Woran erkennt man, dass 0 ein Eigenwert von A ist? Berechnen Sie die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts 0.

b) (2 P.) Berechnen Sie eine Basis für den Nullraum von A^2 und berechnen Sie die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 0 von A.

   Möglicher Vorgehensweise: Setzen Sie dieser Basis zu einer Basis von $\mathbb{R}^5$ fort. Wie bildet A diese Basis ab? So erhalten Sie eine Matrix, deren charakteristisches Polynom sich leicht berechnen lässt.

c) (2 P.) Für $F = L_A$ finden Sie ein $m \geq 1$ wie im Fitting-Lemma, d.h. mit $\mathbb{R}^5 = \text{Kern}(F^m) \oplus \text{Bild}(F^m)$. Berechnen Sie Basen von $\text{Kern}(F^m)$ und $\text{Bild}(F^m)$.

d) (2 BP.) Folgern Sie durch eine geschickte Basiswahl, dass A ähnlich ist zu einer Matrix der Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16