Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 05 - Lösungen

Stilianos Louca

3. April 2008

Aufgabe 01

a) **Zwischenbemerkung:** Allgemein sind zwei Nebenklassen $v+U,\ u+U$ in der Quotientengruppe V/U genau dann gleich, wenn es ein $x \in U$ gibt, mit $v = u + x$.
Beweis: Seien $v+U = u+U$. Dann ist

$$v = v + \underbrace{0}_{\in U} \in v + U = u + U \ \rightarrow \ \exists\, x \in U : v = u + x$$

Seien andersrum $v, u \in V,\ x \in U$ so dass $v = u + x$. Für jedes

$$h = v + \underbrace{h_u}_{\in U} \in v + U$$

kann man schreiben

$$h = u + \underbrace{x + h_u}_{\in U} \in u + U$$

d.h $v + U \subset u + U$. Da auch $u = v + \underbrace{(-x)}_{\in U}$ gilt, ist analog $u + U \subset v + U$. Somit sind $v + U = u + U$. $\square$

In unserem Spezialfall ist

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + \underbrace{3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in U}$$

so dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + U\ ,\ \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + U$$

gleich sind!

b) m Vektoren $v_1 + U, .., v_m + U$ im Quotientenraum V/U sind genau dann linear Abhängig wenn es eine nicht-triviale, Null ergebende, Linearkombination gibt, gemäß

$$0 \cong U = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot (v_i + U) = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i v_i + U) \ \leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i \in U$$

In unserem Spezialfall suchen wir also eine Linearkombination

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Diese ist gegeben durch

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-1, 0, 2)$$

so dass
$$-1 \cdot [(1,1,0)+U] + 2 \cdot [(1,0,1)+U] = U \cong 0 \;\rightarrow\; 2 \cdot [(1,0,1)+U] = (1,1,0)+U$$
ist.

c) Sei Φ die zu untersuchende Abbildung.
Zeigen: Φ ist wohldefiniert. Seien $\vec{r}_1 + U = \vec{r}_2 + U$. Dann ist
$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
für ein geeignetes $\lambda \in \mathbb{R}$. Somit ist Φ wegen
$$\Phi(\vec{r}_1 + U) = \begin{pmatrix} z_1 + y_1 - x_1 \\ z_1 - y_1 - 3x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_2 + 2\lambda) + (y_2 - \lambda) - (x_2 + \lambda) \\ (z_2 + 2\lambda) - (y_2 - \lambda) - 3(x_2 + \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 + y_2 - x_2 \\ z_2 - y_2 - 3x_2 \end{pmatrix} = \Phi(\vec{r}_2 + U)$$
wohldefiniert.
Zeigen: Φ ist ein Isomorphismus d.h bijektiv. Wegen
$$2 = \dim \mathbb{R}^3 - \dim U = \dim \mathbb{R}^3/U = \dim \operatorname{image} \Phi + \dim \operatorname{kernel} \Phi$$
genügt es zu zeigen dass $\operatorname{kernel} \Phi = \{0\}$ ist. Somit wäre nämlich Φ injektiv und wegen $\dim \operatorname{image} \Phi = 2 = \dim \mathbb{R}^2$ auch surjektiv also bijektiv. Sei also
$$\Phi((x,y,z)+U) = \begin{pmatrix} z + y - x \\ z - y - 3x \end{pmatrix} = 0$$
was gleichbedeutend ist mit
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \;,\; x \in \mathbb{R} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in U$$
Somit ist $(x,y,z) + U = U \cong 0.$ $\square$

Aufgabe 02

Wegen $\operatorname{rang} A = 2$ ist $\dim \operatorname{image} F = 2$ wobei $F : V \rightarrow W$ der durch A induzierte Endomorphismus ist. Wir müssen also zeigen, dass es Basen $B \in V,\ C \in W$ gibt, mit
$$_B M_C(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =: R$$
Wegen $\dim \operatorname{image} F = 2$ können wir 2 linear unabhängige Vektoren $c_1, c_2 \in \operatorname{image} F$ wählen und diese zu einer Basis $c_1, c_2, c_3 \in W$ fortsetzen. Somit gibt es Vektoren $b_1, b_2 \in V$ mit
$$F(b_1) = c_1 \;,\; F(b_2) = c_2$$
Die Vektoren b_1, b_2 sind ebenfalls linear unabhängig, denn wäre $b_1 = \lambda b_2$ so wäre
$$c_1 = F(b_1) = \lambda F(b_2) = \lambda c_2$$
was ein Widerspruch ist, da c_1, c_2 linear unabhängig sind. b_1, b_2 spannen also einen 2-dimensionalen Unterraum
$$\operatorname{span}\{b_1, b_2\} < V$$
auf. Es gilt außerdem
$$\dim \operatorname{kernel} F = \underbrace{\dim V}_{4} - \underbrace{\dim \operatorname{image} F}_{2} = 2$$
so dass wir eine Basis b_3, b_4 des $\operatorname{kernel} F$ wählen können. Es gilt:
$$\operatorname{span}\{b_1, b_2\} \cap \operatorname{kernel} F = \{0\}$$

denn wäre

$$v = \alpha b_1 + \beta b_2 \in \operatorname{span}\{b_1, b_2\} \cap \operatorname{kernel} F$$

so würde folgen

$$0 = F(v) = \alpha F(b_1) + \beta F(b_2) = \alpha c_1 + \alpha c_2 \;\rightarrow\; c_1, c_2 \text{ linear abhängig}$$

was ein Widerspruch ist! Somit ist die Summe

$$\operatorname{span}\{b_1, b_2\} \oplus \underbrace{\operatorname{kernel} F}_{\operatorname{span}\{b_3, b_4\}} = V$$

direkt und ferner $b_1, .., b_4$ eine Basis, mit der Eigenschaft

$$F(b_1) = c_1,\; F(b_2) = c_2,\; F(b_3) = F(b_4) = 0 \;\rightarrow\; {}_B M_C(F) = R$$

Somit sind A, R äquivalent. $\square$

Aufgabe 03

Die Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ seien ähnlich. Definitionsgemäß gibt es also eine invertierbare Matrix $T \in M_n(\mathbb{K})$ mit

$$A = TBT^{-1}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Produktformel für Determinanten

$$\det(A) = \det\left(TBT^{-1}\right) = \det(T)\det(B)\underbrace{\det\left(T^{-1}\right)}_{[\det(T)]^{-1}} = \det(B)$$

Es gilt allgemein für 2 Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\operatorname{trace}(AB) = \operatorname{trace}\left(A^i_k B^k_j\right) = A^i_k B^k_i = B^k_i A^i_k = \operatorname{trace}(BA)$$

Somit folgt für unseren Spezialfall

$$\operatorname{trace}(A) = \operatorname{trace}\left((TB)T^{-1}\right) = \operatorname{trace}\left(T^{-1}(TB)\right) = \operatorname{trace}\left(\left(T^{-1}T\right)B\right) = \operatorname{trace}\left(I_n B\right) = \operatorname{trace}(B)$$

Betrachten nun die Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \;,\; B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \;,\; C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

berechnen deren Spuren bzw. Determinanten:

$$\det(A) = 0 \;,\; \operatorname{trace}(A) = 4$$

$$\det(B) = -2 \;,\; \operatorname{trace}(B) = 0$$

$$\det(C) = 0 \;,\; \operatorname{trace}(C) = -1$$

und sehen dass sie paarweise <u>nicht</u> ähnlich sind!

Aufgabe 04

a) Zwei Elemente $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{F}_5$ sind genau dann gleich wenn die Differenz $a - b$ durch 5 teilbar ist. Somit ist die Anzahl der Elemente in $\mathbb{F}_5$ genau 5:

$$\mathbb{F}_5 \sim \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\right\}$$

Die Operationen zwischen den Elementen sind

$$\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b} \;,\; \overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$$

wobei $0 \cong \overline{0} = 5\mathbb{Z}$ und $1 \cong \overline{1}$ ist. Ein Element $\overline{a} \in \mathbb{F}_5$ ist genau dann ein Quadrat wenn es ein weiteres Element $\overline{b} \in \mathbb{F}_5$ gibt mit $\overline{a} = \overline{b}^2 = \overline{b} \cdot \overline{b}$. So sind die Elemente

$$\overline{0} = \overline{0}^2 \ , \ \overline{1} = \overline{1}^2 \ , \ \overline{4} = \overline{2}^2$$

Quadrate. Die Elemente $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{5}$ dagegen sind keine Quadrate (Quadrieren aller Elemente zeigt genau dies). Betrachten nun das Polynom

$$p(X) := X^2 - \overline{2}$$

und fordern dass $p(X) \overset{!}{=} 0$ ist.Demnach muss $X^2 = \overline{2}$ für irgendein $X \in \mathbb{F}_5$ sein, was jedoch grade eben als unmöglich erklärt wurde!

b) Betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \overline{0} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{1} & \overline{0} & \overline{2} \\ \overline{0} & \overline{1} & \overline{4} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_5)$$

und deren charakteristisches Polynom

$$p_A\left(\overline{X}\right) = \det\left(\overline{X}I_3 - A\right) = \overline{4} \cdot \overline{X}^2 + \overline{2} \cdot \overline{1} \cdot \overline{1} - \overline{2} \cdot \overline{1} \cdot \overline{X} = \overline{4X^2 - 2X + 2}$$

Dieses hat keine Nullstelle für $\overline{X} \in \mathbb{F}_5$ (Einsetzen der 5 Elemente zeigt genau dies) und ist somit nicht als Produkt linearer Faktoren zu schreiben. Somit ist A nicht triangulierbar. $\square$

Aufgabe 05

Das charakteristische Polynom $p_A \in \mathbb{C}[X]$ der Matrix A ist gegeben durch

$$p_A(X) = \det(XI_3 - A) = (X - 1)(X - i)^2$$

woraus man sofort die beide Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = i$ ablesen kann. Finden wir also eine Basis $B = b_1, b_2, b_3$ für $\mathbb{C}^3$ so dass b_1, b_2 entsprechende Eigenvektoren sind, so hat die Matrix ${}_BM_B(F)$ des durch A induzierten Endomorphismus $F : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ die Gestallt

$${}_BM_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & i & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$

und ist somit trianguliert und automatisch ähnlich der Matrix A.
Die Eigenräume von A sind gegeben durch

$$E_1(A) = \operatorname{span}\{b_1\} \ , \ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}$$

$$E_i(A) = \operatorname{span}\{b_2\} \ , \ b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und mit

$$b_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$$

bilden die Vektoren b_1, b_2, b_3 eine Basis für $\mathbb{C}^3$.
Konstruktion der Matrix: Untersuchen das Verhalten des Isomorphismus F in den Basisvektoren:

$$F(b_1) = A \cdot b_1 = b_1 \ , \ F(b_2) = A \cdot b_2 = ib_2 \ , \ F(b_3) = A \cdot b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - i \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = (1 - i)b_1 + (4 + i)b_2 + ib_3$$

und bekommen die Matrix

$$C := {}_BM_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1-i) \\ 0 & i & 4+i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Matrix T die erfüllt

$$C = TAT^{-1}$$

ist genau die Basistransformationsmatrix zwischen der Standardbasis E und B gemäß $T = {}_EM_B(I_3)$. Diese ist gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \ , \ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 06

a) Sei

$$\sum_{i=0}^{r-1} \lambda_i A^i v = 0$$

für geeignete $\lambda_0, .., \lambda_{r-1} \in \mathbb{K}$.
Annahme: Mindestens ein $\lambda_i \neq 0$. Sei

$$k = \min\{i : \lambda_i \neq 0\}$$

Dann ist

$$0 = \sum_{i=k}^{r-1} \lambda_i A^i v \ \rightarrow \ 0 = A^{r-k-1} \sum_{i=k}^{r-1} \lambda_i A^i v = \lambda_k \underbrace{A^{r-1} v}_{\neq 0} + \sum_{i=k+1}^{r-1} \lambda_i \underbrace{A^{r-k-1+i} v}_{0} \ \rightarrow \ \lambda_k = 0$$

was ein Widerspruch ist! Somit sind alle $\lambda_i = 0$ und die Vektoren $v, Av, .., A^{r-1}v$ sind linear unabhängig. $\square$

b) Sei

$$\sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} A^i v_j = \sum_{i=0}^{r-1} A^i \underbrace{\sum_{j=1}^{s} \lambda_{ij} v_j}_{=:\, u_i}$$

für geeignete $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$.
Annahme: Mindestens ein $\lambda_{ij} \neq 0$. Sei

$$k := \min\{k : \exists\ j : \lambda_{kj} \neq 0\}$$

Da die Vektoren

$$v_1 + U, .., v_s + U$$

eine Basis des Quotientenraums $\mathbb{K}^n / U$ bilden, sind diese linear unabhängig, d.h

$$\sum_{j=1}^{s} \mu_j (v_j + U) = \sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j + U = U \cong 0 \ \rightarrow \ \mu_j = 0 \ \forall\ j$$

$$\Rightarrow \left\{ \sum_{j=1}^{s} \mu_j v_j \in \text{kernel}\left(A^{r-1}\right) \ \rightarrow \ \mu_j = 0 \ \forall\ j \right\}$$

Somit ist

$$u_i = 0 \ \forall\ i < k \ \wedge \ A^{r-1} u_k \neq 0$$

woraus folgt

$$0 = \sum_{i=0}^{r-1} A^i u_i = \sum_{i=k}^{r-1} A^i u_i \ \rightarrow \ 0 = A^{r-k-1} \sum_{i=k}^{r-1} A^i u_i = A^{r-1} u_k + \sum_{i=k+1}^{r-1} \underbrace{A^{r-k-1+i} u_i}_{0} = A^{r-1} u_k$$

was ein Widerspruch ist! Somit sind alle $\lambda_{ij} = 0$ und die Vektoren $A^i v_j$ linear unabhängig. $\square$