

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007

Übungsblatt 5

Abgabe: Aufgrund des Feiertags am 17.05. findet keine Abgabe und deshalb keine Bewertung statt. Bitte bringen Sie Ihre Lösungen zur Übungsstunde mit.

Aufgabe 1: Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ der Unterraum, der von $(1, -1, 2)$ aufgespannt wird.

- Von den vier Vektoren $(3, 1, 2) + U$, $(-4, 1, 1) + U$, $(2, -2, 4) + U$, und $(0, 4, -4) + U$ des Quotientenraums $\mathbb{R}^3/U$ sind zwei gleich. Welche?
- Finden Sie eine lineare Abhängigkeit im Quotientenraum V/U zwischen den Vektoren $(1, 1, 0) + U$, $(0, 1, 1) + U$ und $(1, 0, 1) + U$.
- Zeigen Sie, dass die durch $(x, y, z) + U \mapsto (z + y - x, z - y - 3x)$ gegebene Abbildung $\mathbb{R}^3/U \rightarrow \mathbb{R}^2$ wohldefiniert und ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 2: Die Matrix (3×4) -Matrix A hat Rang 2. Zeigen Sie, dass A zur Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ äquivalent ist.

Aufgabe 3: Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante und die gleiche Spur haben. Folgern Sie, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ paarweise nicht ähnlich sind. *Hinweis für Spur:* Sie könnten zeigen, dass $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ gilt. Dies hilft Ihnen weiter: aber wie?

Aufgabe 4: Wir arbeiten in $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ und schreiben $\bar{n}$ für die Restklasse $\bar{n} = n + 5\mathbb{Z}$. So ist z.B. $\overline{-2} = \bar{3}$.

- Listen Sie die Elemente von $\mathbb{F}_5$ auf. Welche Elemente von $\mathbb{F}_5$ sind Quadrate? Zeigen Sie, dass $X^2 - \bar{2}$ keine Nullstellen in $\mathbb{F}_5$ hat.
- Zeigen Sie, dass die Matrix $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{F}_5)$ nicht triangulierbar ist.

Aufgabe 5: Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & -1-i & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 1+i & 2-i & i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C})$ ist automatisch triangulierbar. Finden Sie eine obere Dreiecksmatrix C , die zu A ähnlich ist. Finden Sie außerdem eine invertierbare Matrix T , die $TAT^{-1} = C$ erfüllt.

Aufgabe 6: Sei $A \in M_n(k)$ eine Matrix mit Minimalpolynom X^r . Es ist also $A^{r-1} \neq 0$ und $A^r = 0$. Sei $v \in k^n$ ein Vektor mit $A^{r-1} \cdot v \neq 0$. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \dots, A^{r-1}v$ linear unabhängig sind.

(*) Nun sei $U \subsetneq k^n$ der Nullraum der Matrix $A^{r-1} \neq 0$. Seien $v_1, \dots, v_s$ Vektoren aus k^n derart, dass die Restklassen $v_1 + U, \dots, v_s + U$ eine Basis des Quotientenraums k^n/U bilden. Zeigen Sie, dass die rs Vektoren $A^i v_j$ für $0 \leq i \leq r-1$ und $1 \leq j \leq s$ linear unabhängig in V sind.