Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 04 - Lösungen

Stilianos Louca

29. März 2008

Aufgabe 01

a) Da das Minimalpolynom μ_A das charakteristische Polynom p_A von $A \in M_n(\mathbb{K})$ teilt, ist die Implikation

$$\mu_A(\lambda) = 0 \;\Rightarrow\; p_A(\lambda) = 0$$

trivial. Wollen deshalb die Umkehrung untersuchen: Sei $p_A(\lambda) = 0$. Somit ist λ ein Eigenwert von A und es gibt Vektoren $0 \neq v \in \mathbb{K}^n$ mit $Av = \lambda v$. Ist

$$\mu_A(X) = \sum_{k=1}^{m} a_k X^k$$

das Minimalpolynom von A, so folgt:

$$0 = \underbrace{\mu_A(A)}_{0} v = \left[\sum_{k=1}^{m} a_k A^k\right] v = \sum_{k=1}^{m} a_k \underbrace{\left[A^k v\right]}_{\lambda^k v} = \mu_A(\lambda) v \overset{v\neq 0}{\rightarrow} \mu_A(\lambda) = 0 \quad \square$$

b) Seien $l_1, .., l_m$ die paarweise verschiedenen Nullstellen von p_A:

$$\{l_1, .., l_m\} = \{\lambda_1, .., \lambda_n\}$$

Mit Teil (a) folgt: die $l_1, .., l_m$ sind auch Nullstellen des Minimalpolynoms μ_A. Somit ist μ_A durch

$$\prod_{i=1}^{m} (X - l_i)$$

teilbar. Somit ist $\mu_A(X)^n$ durch

$$\prod_{i=1}^{m} (X - l_i)^n$$

teilbar. Jeder linearer Faktor $(X - l_i)$ käme in p_A genau $c_i \leq n$ mal vor, d.h

$$p_A(X) = \prod_{i=1}^{m} (X - l_i)^{c_i} \mid \prod_{i=1}^{m} (X - l_i)^n \mid \mu_A(X)^n \;\rightarrow\; p_A(X) \mid \mu_A(X)^n \quad \square$$

c) Da $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ist, ist das charakteristische Polynom p_B auch für $B \in M_8(\mathbb{C})$ genau

$$p_B(X) = X(X+2)^3(X^2+1)^2 = X(X+2)^3(X-i)^2(X+i)^2$$

Somit sind $X = \pm i$ Nullstellen von p_B und ferner Nullstellen des Minimalpolynoms μ_B, weshalb μ_B auch durch jeweils $(X \pm i)$ teilbar sein muss, d.h

$$(X+i)(X-i) = (X^2+1) \mid \mu_B \quad \square$$

Bemerke: Eine Matrix B die stückweise aus einer Diagonalanordnung von Blöcken besteht, gemäß

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & B_m \end{pmatrix}$$

wobei die Teilmatrizen $B_i \in M_k(\mathbb{K})$ jeweils die charakteristischen Polynome p_{B_i} haben, hat das charakteristische Polynom

$$p_B(X) = \prod_{i=1}^{m} p_{B_i}(X)$$

Andernfalls, ist

$$p_B(X) = \prod_{i=1}^{m} r_i(X)$$

das charakteristische Polynom einer gesuchten Matrix B, so wäre eine mögliche Lösung genau so eine Matrix wie oben dargestellt, mit $p_{B_i} = r_i$, also in unserem Fall:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 02

a) Assoziieren F mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

bzgl. der kanonischen Basis $(1,0),\ (0,1)$.
Aufgrund der Linearität von F ist U genau dann Invariant wenn $F(1,-1) \in U$ ist. Dies ist genau dann der Fall wenn

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für irgendein $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, d.h

$$A_{11} - A_{12} = A_{22} - A_{21} =: \lambda$$

Der durch F induzierte Endomorphismus $\tilde{F}$ des (eindimensionalen) Quotientenraums V/U wird definiert durch:

$$\tilde{F}(\vec{v} + U) := F(\vec{v}) + U$$

Setzen $b_1 := (1,-1) \in U$ mit $b_2 := (1,0)$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^2$ fort und bekommen so eine Basis für V/U:

$$\beta := (1,0) + U$$

Untersuchen

$$\tilde{F}(\beta) = \tilde{F}\left[(1,0) + U\right] = F(1,0) + U = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} + U \cong \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} A_{21} \\ -A_{21} \end{pmatrix}}_{\in U} + U = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{21} \\ 0 \end{pmatrix} + U = (A_{11} + A_{21}) \cdot \beta$$

und sehen dass $\tilde{F}$ gegeben ist durch

$$\tilde{F}(v) = (A_{11} + A_{21}) \cdot v$$

b) Die Vorgabe von $\tilde{F}$ ist äquivalent zur Vorgabe von $A_{11} + A_{21} =: \sigma$. Aus oberer Darstellung von $\tilde{F}$ ist ersichtlich dass automatisch auch $A_{22} + A_{12} = \sigma$ ist (setzen: $\beta := (0,1) + U$). Die Vorgabe von $F|_U$ ist äquivalent zur Vorgabe von λ. Doch das System

$$A_{11} - A_{12} = A_{22} - A_{21} = \lambda \qquad\qquad A_{11} + A_{21} = A_{22} + A_{12} = \sigma$$

ist nicht eindeutig lösbar. Somit ist F nicht eindeutig durch $F|_U$ und $\tilde{F}$ bestimmt.

Variante: Betrachten allgemein einen n-dimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, den Endomorphismus F und den invarianten Unterraum $U \leq V$. Wählen eine Basis $B = b_1, .., b_m$ von U und setzen diese zu einer Basis $b_1, .., b_n$ von V fort. Dann hat die dem Endomorphismus F entsprechende Matrix ${}_BM_B(F)$ die Blockgestallt

$${}_BM_B(F) = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $B \in M_m(\mathbb{K})$ die Matrix des eingeschränkten Endomorphismus $F|_U$ bzgl. $b_1, .., b_m$ und $D \in M_{n-m}(\mathbb{K})$ die Matrix des durch F induzierten Endomorphismus $\tilde{F}$ auf V/U bzgl. $b_{m+1}+U, .., b_n+U$ ist. Andersrum, sind die Endomorphismen $F|_U$ und $\tilde{F}$ eindeutig durch B, D bestimmt. Bei Vorgabe der $F|_U$, $\tilde{F}$ sind somit zwar die B, D festgelegt, doch ist gleichzeitig C noch frei wählbar und somit auch F nicht eindeutig!

Aufgabe 03

a) Zeigen die 3 Eigenschaften eines Ideals:

- Seien $f, g \in I$, d.h $f = r_f(X) \cdot (X^2 + 1)$, $g = r_g(X) \cdot (X^2 + 1)$ für geeignete $r_f, r_g \in \mathbb{R}[X]$. Dann ist
$$f + g = [r_f(X) + r_g(X)] \cdot \left(X^2 + 1\right) \in I$$
- Sei $f \in I$ und $g \in \mathbb{R}[X]$ beliebiges Polynom. Dann ist
$$f \cdot g = r_f \cdot (X^2 + 1) \cdot g \in I$$
- Das Polynom $0 \in \mathbb{R}[X]$ ist auch durch $(X^2 + 1)$ Teilbar und somit Element von I.

Somit ist I ein Ideal. $\square$

b) **Zeigen:** Φ ist wohldefiniert. Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$ so dass $f + I = g + I$. Dann $\exists\, h \in I : f = g + h$, d.h $f = g + (X^2 + 1) \cdot \tilde{h}$ für ein geeignetes $\tilde{h}$. Somit ist

$$\Phi(f + I) = f(i) = g(i) + \underbrace{(i^2 + 1)}_{0} \cdot \tilde{h}(i) = g(i) = \Phi(g + I)$$

Zeigen: Φ ist surjektiv. Sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$ beliebig. Dann erfüllt das Polynom

$$f(X) = a + X \cdot b \in \mathbb{R}[X]$$

die Bedingung

$$f(i) = z \;\rightarrow\; \Phi(f + I) = z$$

Zeigen: Φ ist injektiv. Seien $f, g \in \mathbb{R}[X]$ so dass

$$\Phi(f + I) = \Phi(g + I) \;\leftrightarrow\; f(i) = g(i)$$

ist. Nennen $h := f - g$ und sehen dass $f = g + h$ ist, wobei $h \in \mathbb{R}[X]$ ein Nullstelle in $X = i$ hat. Wir wissen dass es $q, r \in \mathbb{R}[X]$ gibt, mit $\operatorname{grad} r < \operatorname{grad}(X^2 + 1) = 2$ und

$$h(X) = q(X) \cdot (X^2 + 1) + r(X)$$

Somit ist

$$0 = h(i) = q(i) \cdot \underbrace{(i^2 + 1)}_{0} + r(i) \;\rightarrow\; r(i) = 0$$

Es existiert kein Polynom $r \in \mathbb{R}[X]$ mit $\operatorname{grad} r \leq 1$ und $r(i) = 0$ außer dem Nullpolynom $r \equiv 0$. Somit ist $(X^2 + 1) \mid h$ und ferner $h \in I$. Aus $f = g + h$ folgt somit $f \in I$ bzw. $f + I = g + I$.
Somit ist Φ eine Bijektion. $\square$

Aufgabe 04

Durch die Dimensionsformel für lineare Abbildungen weis man

$$\dim \operatorname{kernel}(f) + \dim \operatorname{image}(f) = \dim V$$

Wegen Surjektivität ($\operatorname{image}(f) = W$) folgt

$$\dim W = \dim \operatorname{image}(f) = \dim V - \dim \operatorname{kernel}(f) = \dim V / \operatorname{kernel}(f)$$

Zwei endlich dimensionale k-Vektorräume gleicher Dimension sind immer Isomorph. $\square$