Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 4

Abgabe am Do 10.05. in der Vorlesung.

Aufgabe 1: Sei k ein Körper und $A \in M_n(k)$ eine Matrix.

a) (3 P.) Zeigen Sie, dass jede Nullstelle des Minimalpolynoms $m_A(X)$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms $p_A(X)$ ist, und auch umgekehrt. *Hinweis*: Eigenwerte.

b) (2 P.) Angenommen, das charakteristische Polynom zerfällt in $k[X]$ als ein Produkt von linearen Faktoren, d.h. es ist

$$p_A(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

für Skalare $\lambda_i \in k$, die nicht paarweise verschieden sein brauchen. Zeigen Sie, dass $m_A(X)^n$ durch $p_A(X)$ teilbar ist. *Beispiel*: Für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

ist $m_A(X) = (X-1)(X-2)$ und $p_A(X) = (X-1)(X-2)^2$, weshalb bereits $m_A(X)^2$ durch $p_A(X)$ teilbar ist.

c) (3 P.) Es ist $p_B(X) = X(X+2)^3(X^2+1)^2$ für eine bestimmte Matrix $B \in M_8(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass auch das Minimalpolynom von B durch X^2+1 teilbar ist. *Hinweis*: Betrachten Sie B als Element von $M_8(\mathbb{C})$.
(*) Geben Sie eine solche Matrix B an.

Aufgabe 2: (4 P.) Listen Sie alle Endomorphismen F des $\mathbb{R}^2$ auf, für die der Unterraum $U = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ invariant ist, d.h. $F(U) \subseteq U$. Geben Sie in jedem Fall den induzierten Endomorphismus $\bar{F}$ des Quotientenraums V/U an.
(1 BP.) Ist ein solches F eindeutig durch die Angabe von $\bar{F}$ und von der Einschränkung $F|_U$ bestimmt?

Aufgabe 3: Im kommutativen Ring $\mathbb{R}[X]$ sei I die Teilmenge $I = \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f \text{ ist durch } X^2+1 \text{ teilbar}\}$.
(1 P.) Zeigen Sie, dass I ein Ideal in $\mathbb{R}[X]$ ist (im Sinne von Korollar 12.2).
(3 P.) Sei $\Phi\colon \mathbb{R}[X]/I \to \mathbb{C}$ die Abbildung $\Phi\colon f + I \mapsto f(i)$. Zeigen Sie dass f wohldefiniert und eine Bijektion ist.

Aufgabe 4: (3 BP.) Sei $f\colon V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung zwischen k-Vektorräumen. Zeigen Sie, dass W zum Quotientenvektorraum $V/\operatorname{Kern}(f)$ isomorph ist.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16