Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 — Übungsblatt 3

Abgabe am Do 03.05. in der Vorlesung.

Diese Woche sind die Aufgaben theoretisch bzw. finden in ungewöhnlichen Körpern statt. Versuchen Sie, damit zu recht zu kommen. Inzwischen gibt es auf der CAJ-Seite zu LAAG2 einen Link zum LAAG1-Skript: ganz unten, bei „Literatur“.

Aufgabe 1: Der Ring $\mathbb{Z}/6$ von Restklassen modulo 6 wird so definiert: es ist $\mathbb{Z}/6 = \{[n] \mid n \in \mathbb{Z}\}$, wobei $[n] = [m]$ genau dann, wenn $n \equiv m \pmod 6$ gilt, d.h. wenn $m - n$ durch 6 teilbar ist. Somit hat $\mathbb{Z}/6$ genau 6 Elemente: [0], [1], [2], [3], [4] uns [5]. Addition und Multiplikation sind gegeben durch $[n]+[m] = [n+m]$ und $[n]\cdot[m] = [nm]$. Sie dürfen davon ausgehen, dass diese Operationen $\mathbb{Z}/6$ zu einem kommutativen Ring mit Nullelement [0] und Einselement [1] machen. Es ist zum Beispiel $[4]+[3] = [1]$, $[2]\cdot[5] = [4]$ und $-[2] = [4]$.

a) (2 P.) Zeigen Sie: es gibt $a \in \mathbb{Z}/6$ mit $a \cdot [4] = [2]$, aber es gibt kein $[b] \in \mathbb{Z}/6$ mit $[b] \cdot [2] = [1]$.

Betrachten wir jetzt die Matrizen $A = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [2] & [0] & [3] \\ [1] & [1] & [1] \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} [1] & [2] & [1] \\ [2] & [0] & [3] \\ [1] & [1] & [2] \end{pmatrix}$ aus $M_3(\mathbb{Z}/6)$.

b) (6 P.) Berechnen Sie $\det(A)$, $\det(B)$, $\mathrm{Adj}(A)$ und $\mathrm{Adj}(B)$.

c) (3 P.) Zeigen Sie: von den Matrizen A, B ist eine invertierbar und die andere nicht. Berechnen Sie die Inverse-Matrix der invertierbaren Matrix.

d) (4 BP.) Finden Sie eine lineare Abhängigkeit (mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}/6$) zwischen den Zeilen der nichtinvertierbaren Matrix.

Aufgabe 2: Der Körper $\mathbb{F}_4$ besteht aus vier Elementen: $\bar{0}, \bar{1}, \omega$ und $\bar{1}+\omega$. Es ist $a+a = \bar{0}$ für jedes $a \in \mathbb{F}_4$. Außerdem ist $\omega^2 = \omega + \bar{1}$. Beachten Sie, dass die Teilmenge $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ bezüglich dieser Addition und Multiplikation selbst ein Körper ist, und zwar der Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen.

Betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$, die in $M_2(\mathbb{F}_2)$ und in $M_2(\mathbb{F}_4)$ liegt. Zeigen Sie:

a) (3 P.) Betrachtet man A als Element von $M_2(\mathbb{F}_2)$, so gibt es keine Eigenwerte.

b) (2 P.) Betrachtet man A als Element von $M_2(\mathbb{F}_4)$, so ist A diagonalisierbar.
(2 BP.) Finden Sie eine Basis, die aus Eigenvektoren besteht.

Aufgabe 3: Die Matrix $A \in M_n(k)$ habe das charakteristische Polynom $p_A(X) = f(X)g(X)$, wobei $f, g \in k[X]$ Polynome sind mit $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Zeigen Sie:

a) (3 BP.) $\{v \in k^n \mid f(A) \cdot v = 0\} = \{g(A) \cdot v \mid v \in k^n\}$;

b) (*) $\{v \in k^n \mid f(A) \cdot v = 0\} \oplus \{v \in k^n \mid g(A) \cdot v = 0\} = k^n$.

Hinweis: Vgl. Blatt 2, Aufgabe 5.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16