Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 02 - Lösungen

Stilianos Louca

28. März 2008

Aufgabe 01

Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$p_A(X) = \det(XI_4 - A) = (X-1) \cdot \underbrace{\left[X^3 - 2X^2 + 2X - 1\right]}_{q(X)}$$

wobei nahe liegt dass wegen $p_A(A) = 0$ höchst wahrscheinlich auch $q(A) = 0$ ist. Direktes Ausrechnen verifiziert diese Vermutung! Es bleibt zu zeigen dass q tatsächlich minimales Polynom ist. Sei

$$r(X) := aX^2 + bX + c$$

ein Polynom 2. bzw. 1. Grades das in $X = A$ verschwindet:

$$a \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind. Durch Komponentenvergleich folgt $a = b = c = 0$ was ein Widerspruch ist! Demnach ist $q(X)$ Minimalpolynom von A.

Aufgabe 02

Betrachten die Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(A_1, ..., A_n) \in M_n(\mathbb{R})$ und suchen deren Minimalpolynom $\mu_A \in \mathbb{R}[X]$. Durch direktes Ausrechnen und Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich

$$A^k = \operatorname{diag}\left(A_1^k, ..., A_n^k\right) \;,\; k \in \mathbb{N}_0$$

Es ist also ein Vektor $a = (a_0, a_1, ..., a_m) \in \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}_0$ zu suchen, mit minimalem m, so dass

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \cdot A^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k A_1^k, ..., \sum_{k=0}^{m} a_k A_n^k\right) = 0$$

Dies entspricht genau einem linearen Gleichungssystem mit $m+1$ unbekannten $a_0, ..., a_m$ und n Gleichungen, gemäß

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_1^0 & \dots & A_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^0 & \dots & A_n^m \end{pmatrix}}_{\mathcal{A}_m} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0$$

Solange alle Spaltenvektoren $\alpha_0, ..., \alpha_m$ von $\mathcal{A}_m$ linear unabhängig sind, ist $\operatorname{kernel}(A) = \{0\}$ und somit notwendigerweise $\vec{a} = 0$. Sobald (für wachsendes m) die Spaltenvektoren linear abhängig werden, wird $\dim[\operatorname{kernel}(A)] > 0$ so dass es eine

nicht-triviale Lösung für $\vec{a}$ gibt. Genau dieses Gleichungssystem $\mathcal{A}_m \cdot \vec{a} = 0$ ist zu lösen und so zu normieren, dass $a_m = 1$ ist.
Anders gesehen: Die Gleichung

$$\sum_{k=0}^{m} a_k A^k = 0$$

entspricht genau der Gleichung

$$\sum_{k=0}^{m} a_k \vec{\alpha}_k = 0 \ , \ \vec{\alpha}_k = \begin{pmatrix} A_1^k \\ \vdots \\ A_n^k \end{pmatrix}$$

was genau dann eine nicht-triviale Lösung hat, wenn (definitionsgemäß) $\vec{\alpha}_0, .., \vec{\alpha}_m$ linear abhängig werden! Das Minimalpolynom μ_A ergibt sich schließlich als

$$\mu_A(X) = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$$

Spezialfall:

$$A = \mathrm{diag}\,(1, 3, 0, 1)$$

Berechnen die Spaltenvektoren von $\mathcal{A}_m$ bis $m = 3$

$$\alpha_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} A_1^2 \\ \vdots \\ A_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_3 = \begin{pmatrix} A_1^3 \\ \vdots \\ A_4^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 27 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und sehen zum einen dass α_0, α_1 und α_2 zwar linear unabhängig sind, jedoch $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ linear abhängig sind, so dass sich eine mögliche (hier: normierte) Lösung ergibt als

$$\vec{a} = (0, 3, -4, 1) \ \rightarrow \ \mu_A(X) = X^3 - 4X^2 + 3X$$

Direktes Ausrechnen zeigt, dass $\mu_A(A) = 0$ ist!

Aufgabe 03

Suchen im Grunde genommen eine Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ die die Gleichung

$$A^4 + A^2 = 2A^3$$

erfüllt, bzw. deren Minimalpolynom. Eine Matrix A_1 mit dem Minimalpolynom

$$\mu_1(X) = X^4 - 2X^3 + X^2$$

erfüllt obere Gleichung, denn

$$0 = \mu_1(A_1) = A^4 - 2A^3 + A^2$$

Jedoch wäre diese Matrix keine 3×3 Matrix, denn ihr charakteristisches Polynom, und demnach auch ihr Minimalpolynom, wären höchstens vom Grad 3!
Möglichkeiten wären also Matrizen $A_2, A_3 \in M_3(\mathbb{R})$ mit den Minimalpolynomen

$$\mu_2(X) = X^3 - 2X^2 + X \ , \ \mu_3(X) = X^2 - 2X + 1$$

was eine Linksmultiplikation mit A_2 bzw. A_3^2 bestätigt:

$$0 = A_2 \cdot \mu_2(A_2) = A_2 \cdot \left[A_2^3 - 2A_2^2 + A_2\right] = A_2^4 - 2A_2^3 + A_2^2$$

$$0 = A_3^2 \cdot \mu_3(A_3) = A_3^4 - 2A_3^3 + A_3^2$$

Bemerke: Die Matrizen A_1, A_2 dürfen nicht invertierbar sein, da sonst μ_1, μ_2 keine <u>Minimal</u>polynome wären! Dies illustriert folgendes Beispiel: Hätte eine invertierbare Matrix A das Minimalpolynom

$$\mu(X) = X^3 - 2X^2 + X$$

so würde

$$p(X) := X^2 - 2X + 1$$

auch in $X = A$ verschwinden, denn

$$p(A) = A^2 - 2A + I = A^{-1} \cdot \underbrace{\mu(A)}_{0} = 0$$

Doch es wäre $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} \mu$ was ein Widerspruch wäre!

- Für

  $$\mu_3(X) = X^2 - 2X + 1$$

  machen wir den Ansatz

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

  und bekommen

  $$A^2 - 2A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ ac - a & bc - b & c^2 - 2c + 1 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0 \ \rightarrow \ c = 1, \ a, b : \text{beliebig}$$

  Wählen a, b so dass es <u>keine</u> a_0, a_1 gibt mit $a_1 A + a_0 I = 0$ und $(a_0, a_1) \neq (0,0)$. Dies ist z.B für $a = 1, b = 0$ der Fall:

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Für

  $$\mu_2 = X^3 - 2X^2 + X$$

  machen wir den Ansatz

  $$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

  und bekommen

  $$A^3 - 2A^2 + A = \begin{pmatrix} a^3 - 2a^2 + a & a^2 b - b(a+2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 - 2c^2 + c \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

  $$\rightarrow \ a, c \in \{0, 1\}, \ b : \text{beliebig}$$

Wählen a, b, c so, dass es keine a_0, a_1, a_2 gibt mit $a_2A^2 + a_1A + a_0I = 0$ und $(a_0, a_1, a_2) \neq (0, 0, 0)$. Dies ist z.B für $a = 1, b = 2, c = 1$ der Fall:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

denn das System

$$a_2A^2 + a_1A + a_0I = \begin{pmatrix} a_0 + a_1 + a_2 & 2a_1 + 4a_2 & 0 \\ 0 & a_0 + a_1 + a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

besitzt keine nicht-trivialen Lösungen.

- Betrachten spasseshalber den allgemeineren Fall $A \in M_n(\mathbb{R})$. Für

$$\mu_1 = X^4 - 2X^3 + X^2$$

machen wir den Ansatz

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & 0 & d & 0 \end{pmatrix}$$

und bekommen

$$A^4 - 2A^3 + A^2 =$$

$$\begin{pmatrix} a^4 & 0 & b(a+1)(a^2+1) & 0 \\ ca^3 & 0 & abc(a+1) + cb & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ea^3 & 0 & eab(a+1) + eb + d & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} a^3 & 0 & ab(a+1) + b & 0 \\ ca^2 & 0 & bc(a+1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ea^2 & 0 & e(a+1)b + d & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^2 & 0 & b(a+1) & 0 \\ ca & 0 & bc & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ea & 0 & eb + d & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \ a \in \{0, 1\}, \ b, c, d, e : \text{beliebig}$$

Wählen a, b, c, d so, dass es keine $a_0, .., a_3$ gibt mit $a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I_3 = 0$ und $(a_0, .., a_3) \neq (0, 0, 0, 0)$. Dies ist z.B für $a = 1, b = 3, c = 5, d = 2, e = 7$ der Fall:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

denn das System

$$a_3A^3 + a_2A^2 + a_1A + a_0I$$

$$= a_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 & 0 \\ 5 & 0 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 44 & 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 23 & 0 \end{pmatrix} + a_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + a_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

besitzt keine nicht-trivialen Lösungen.

Aufgabe 04

Wenden den Euklidischen Algorithmus an und bekommen

$$X^4 + X^2 + 1 = X \cdot (X^3 - 1) + \left[X^2 + X + 1\right]$$

$$X^3 - 1 = (X - 1) \cdot (X^2 + X + 1) \ \rightarrow \ \text{ggT}\left(X^4 + X^2 + 1, X^3 - 1\right) = X - 1 \cong \underline{X + 2}$$

Aufgabe 05

- **Zeigen:**
$$\forall\ v \in \mathbb{R}^n : Av - 2v \in E_3(A)\ \wedge\ Av - 3v \in E_2(A)$$

  Beweis:
$$A^2 - 5A + 6I = 0\ \rightarrow\ A\left[Av - 2v\right] = \left[A^2 - 2A\right] v = \left[3A - 6I\right] v = 3\left[Av - 2v\right]$$
$$A\left[Av - 3v\right] = \left[A^2 - 3A\right] v = \left[2A - 6I\right] v = 2\left[Av - 3v\right]$$

- **Suchen:** $p, q \in \mathbb{R}[X]$ mit:
$$(X-2)p + (X-3)q = 1$$

  Beispiel:
$$p = 1\ ,\ q = -1$$

  Somit ist insbesondere
$$(A - 2I)p(A) + (A - 3I)q(A) = I$$

- **Zeigen:**
$$\forall\ v \in \mathbb{R}^n : \left[Ap(A) - 2p(A)\right] v + \left[Aq(A) - 3q(A)\right] v = v$$

  Beweis:
$$\left[Ap(A) - 2p(A)\right] v + \left[Aq(A) - 3q(A)\right] v = \left[Ap(A) + Aq(A)\right] v + \underbrace{\left[-2p(A) - 3q(A)\right]}_{I - Ap(A) - Aq(A)} v$$
$$= \left[Ap(A) + Aq(A)\right] v + v - \left[Ap(A) + Aq(A)\right] v = v$$

- **Beweis der Diagonalisierbarkeit:** Eine Matrix $A \in M_n(R)$ ist genau dann diagonalisierbar wenn es eine Basis $B := b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}^n$ gibt, wobei $b_1, ..., b_n$ Eigenvektoren von A sind. Nehmen eine beliebige Basis $a_1, ..., a_n$ von $\mathbb{R}^n$ (z.B die Standardbasis), schreiben für $i = 1, .., n$:
$$a_i = \underbrace{\left[Ap(A) - 2p(A)\right] a_i}_{=:\ \beta_i \in E_3(A)} + \underbrace{\left[Aq(A) - 3q(A)\right] a_i}_{=:\ \beta_{n+i} \in E_2(A)}$$

  und sehen dass $\mathcal{B} := \beta_1, ..., \beta_{2n}$ ein (aus Eigenvektoren von A bestehendes) Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$ ist, da es insbesondere ein Erzeugendensystem der Basis $a_1, ..., a_n$ ist. Nach dem Satz über die Existenz von Basen (siehe LAAG1) lässt sich dieses (linear abhängige) System $\mathcal{B}$ zu einer Basis $B := b_1, ..., b_n$ kürzen, wobei $B \subset \mathcal{B}$ stets aus Eigenvektoren von A besteht. $\square$