Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 2

Abgabe am Do 26.04. in der Vorlesung.

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: (4 P.) Sei $A \in M_4(\mathbb{R})$ die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Aufgabe 2: (4 P.) Bestimmen Sie das Minimalpolynom der Diagonalmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R}) .$$

Wie bestimmt man im allgemeinen Fall das Minimalpolynom einer Matrix in Diagonalgestalt?

Aufgabe 3: (4 P.) Die Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ erfüllt die Gleichung $A^4 + A^2 = 2A^3$. Welche Möglichkeiten gibt es für das Minimalpolynom $m_A(X)$? Geben Sie jedesmal eine Matrix mit diesem Minimalpolynom an.

Aufgabe 4: (4 P.) Berechnen Sie $\mathrm{ggT}(X^3-1, X^4+X^2+1)$ im Polynomring $k[X]$, wobei k der Körper $\mathbb{F}_3$ mit drei Elementen 0, 1 und $2 = -1$ ist.

Aufgabe 5: (4 BP.) Die Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ habe das Minimalpolynom

$$m_A(X) = X^2 - 5X - 6 = (X-2)(X-3) .$$

Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist.

Ein möglicher Lösungsweg: Zeigen Sie, dass $A \cdot v - 2v \in E_3(A)$ und $A \cdot v - 3v \in E_2(A)$ gelten für jedes $v \in \mathbb{R}^n$. Finden Sie Polynome p, q mit $(X-2)p + (X-3)q = 1$. Überlegen Sie dann, dass $v = (A \cdot u - 2u) + (A \cdot w - 3w)$ gilt für jedes $v \in \mathbb{R}^n$, mit $u = p(A) \cdot v$ und $w = q(A) \cdot v$.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16