Lineare Algebra II
FSU Jena - SS 2007
Übungsblatt 01 - Lösungen

Stilianos Louca

27. März 2008

Aufgabe 01

Wenden den Euklidischen Algorithmus an:

$$g = (X-2)f + \left(7X^2 - X + 3\right) \;\rightarrow\; \mathrm{ggT}\,(g,f) = \mathrm{ggT}\left(f, 7X^2 - X + 3\right)$$

$$f = \left(\frac{X}{7} + \frac{22}{49}\right)\cdot\left(7X^2 - X + 3\right) + \left(\frac{X}{49} - \frac{17}{49}\right) \;\rightarrow\; \mathrm{ggT}\left(f, 7X^2 - X + 3\right) = \mathrm{ggT}\left(7X^2 - X + 3,\ \frac{X}{49} - \frac{17}{49}\right)$$

$$7X^2 - X + 3 = \left(7^3X + 118\cdot 49\right)\cdot\left(\frac{X}{49} - \frac{17}{49}\right) + 2009 \;\rightarrow\; \mathrm{ggT}\left(7X^2 - X + 3,\ \frac{X}{49} - \frac{17}{49}\right) = \mathrm{ggT}\left(\frac{X}{49} - \frac{17}{49},\ 2009\right) = 1 \quad \square$$

Aufgabe 02

Zeigen zuerst, die Menge I, definiert durch

$$I := \left\{a^1h_1 + a^2h_2 + a^3h_3 : a^1, a^2, a^3 \in \mathbb{K}[X]\right\},\ h_1 := (X-\beta)(X-\gamma)\ ,\ h_2 := (X-\gamma)(X-\alpha)\ ,\ h_3 := (X-\alpha)(X-\beta)$$

ein Ideal ist:

$$f, g \in I \;\rightarrow\; f = f^ih_i,\ g = g^jh_j \;\rightarrow\; f + g = \left(f^ig^i\right)h_i \in I$$

$$\text{Seien } f \in I \text{ und } g \in \mathbb{K}[X] \text{ beliebig} : \rightarrow\; fg = gf^ih_i \in I$$

$$h_i \neq 0 \;\rightarrow\; \exists\ 0 \neq f \in I$$

Somit existiert ein *erzeugendes*, minimales Polynom f_0 für I. Dies teilt insbesondere die Polynome h_1, h_2, h_3:

$$h_i = \lambda_i f_0$$

und ist somit höchstens 2. Grades. Im Falle $\mathrm{grad}(f_0) = 2$ müssen die λ_i alles skalare sein. Durch Koeffizientenvergleich folgt $\lambda_i = 1$ (da f_0 normiert ist). Somit ist $f_0 = h_1 = h_2 = h_3$ was wegen $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ ein Widerspruch ist. Somit ist $\mathrm{grad}(f_0) \leq 1$:

$$f_0(X) = a + bX \in \mathbb{K}[X]$$

Betrachten den Fall $b \neq 0$. Somit hat dieses Polynom genau eine Nullstelle bei $X_0 = -ab^{-1}$. Wegen $f_0 \mid h_i$ muss diese auch Nullstelle von h_i sein, d.h

$$X_0 \in \{\beta, \gamma\} \;\wedge\; X_0 \in \{\alpha, \gamma\} \;\wedge\; X_0 \in \{\alpha, \beta\}$$

da in einem Körper stets erfüllt ist: $x, y \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot y \neq 0$ weshalb h_1 genau die Nullstellen β, γ hat usw. Doch da α, β, γ verschieden sind, ist obere Annahme falsch! Somit muss $\mathrm{grad}(f_0) = 1 \;\Leftrightarrow\; f_0 = 1$ sein. Somit ist (aufgrund der Definition des Erzeugers)

$$I = \{g \cdot f_0 : g \in \mathbb{K}[X]\} = \{g : g \in \mathbb{K}[X]\} = \mathbb{K}[X]$$

Somit ist jedes Polynom $g \in \mathbb{K}[X]$ auch $g \in I$ und somit darstellbar als

$$g = ph_1 + qh_2 + rh_3 \quad \square$$

Aufgabe 03

Da h durch f und g teilbar ist, sind beide $f, g \neq 0$. Ferner gibt es $a, b \in \mathbb{K}[X]$ so dass

$$h = af = bg$$

ist. Für beliebige f, g ist der Erzeuger $g_0 \in I_{f,g}$ des Ideals

$$I_{f,g} := \{\alpha f + \beta g : \alpha, \beta \in \mathbb{K}[X]\}$$

gegeben durch $g_0 = \mathrm{ggT}(f, g)$. In unserem Fall ist $g_0 = \mathrm{ggT}(f, g) = 1$ so dass es Polynome $\alpha, \beta \in \mathbb{K}[X]$ gibt mit $1 = \alpha f + \beta g$. Durch Multiplikation mit h ergibt sich

$$h = h \cdot 1 = h\alpha f + h\beta g = bg\alpha f + af\beta g = (b\alpha + a\beta) \cdot fg \;\rightarrow\; fg \mid h \quad \square$$

Aufgabe 04

Betrachten den Fall $n = 2$ für eine beliebige Matrix $A = (A_{ij}) \in M_2(\mathbb{K})$. Das charakteristische Polynom p_A ist gegeben durch

$$p_A(X) = \det(XI_2 - A) = (X - A_{11}) \cdot (X - A_{22}) - A_{12}A_{21} = X^2 - (A_{11} + A_{22})\,X + A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$$

Eingesetzt $X = A$ ergibt

$p_A(A) = A^2 - (A_{11} + A_{22})\,A + (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\,I_2$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^2 + A_{12}A_{21} & A_{11}A_{12} + A_{12}A_{22} \\ A_{21}A_{11} + A_{22}A_{21} & A_{21}A_{12} + A_{22}^2 \end{pmatrix} - (A_{11} + A_{22}) \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} & 0 \\ 0 & A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom

$$p_A(X) = \det(XI_n - A) = \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \chi(\mathcal{P}) \prod_{i=1}^{n} \left[X\delta_{i\mathcal{P}(i)} - A_{i\mathcal{P}(i)}\right]$$

ist in dieser Form eigentlich nur für skalare Größen $X \in \mathbb{K}$ zu verstehen. Für Matrizen $H \in M_n(\mathbb{K})$ ist es unter der Form

$$p_A(H) = \sum_{\mathcal{P} \in S_n} \chi(\mathcal{P}) \prod_{i=1}^{n} \left[H\delta_{i\mathcal{P}(i)} - A_{i\mathcal{P}(i)}I_n\right]$$

zu verstehen, d.h in der ursprünglichen Darstellung

$$\det(H * I_n - I * A)$$

ist $H * I_n$ *formal* als eine diagonale Anordnung der Matrix H zu deuten, gemäß

$$H * I_n \sim \begin{pmatrix} H & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & H \end{pmatrix} \;,\; I_n * A \sim \begin{pmatrix} A_{11}I_n & \dots & A_{1n}I_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}I_n & \dots & A_{nn}I_n \end{pmatrix}$$

und nicht als Matrixmultiplikation $H \cdot I_n$.

Zusatzaufgabe:

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, R ein Ring mit $1 \neq 0$ und $f \in \mathbb{K}[X]$, $X \in R$. Zeigen Sie:

$$f(a) = 0 \;\Leftrightarrow\; (X - a) \mid f$$

Bemerkung zur Schreibweise: $(X - a) \equiv (X - a \cdot 1)$, $f(a) \equiv f(a \cdot 1)$ wobei $1 \in R$ ist.

Beweis: Aus $(X - a) \mid f$ folgt trivialerweise $f(a) = 0$. Wollen jetzt die Umkehrung zeigen: Sei $f(a) = 0$.
Annahme: $(X - a)$ teilt nicht f. Dies ist äquivalent zu: $\mathrm{ggT}(X - a, f) = 1$ denn aus

$$\mathrm{ggT}(X - a, f) \neq 1$$

folgt

$$\mathrm{ggT}(X - a, f) = (X - a) \;\Leftrightarrow\; (X - a) \mid f$$

Somit gibt es Polynome $p, q \in \mathbb{K}[X]$ so dass

$$pf + q(X - a) = 1$$

Doch somit ist

$$0 = p(a)\underbrace{f(a)}_{0} + q(a) \cdot \underbrace{(a - a)}_{0} = 1$$

was ein Widerspruch ist. Demnach muss $(X - a) \mid f$ gelten. $\square$
Nebenfolgerung: Ein Polynom $f \in \mathbb{K}[X]$ besitzt genau dann Nullstellen, wenn es durch einen linearen Faktor $(X - a)$ teilbar ist.