Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2

Sommersemester 2007 Übungsblatt 1

Diese Übungsserie wird nicht bewertet. Keine Abgabe. Bitte bringen Sie Ihre Lösungen mit zur Übungsstunde in der zweiten Semesterwoche. Diese Aufgaben sind z.T. etwas anspruchsvoll.

Aufgabe 1: Zeigen Sie, dass die beiden Polynome $f = X^3 + 3X^2 + 1$ und $g = X^4 + X^3 + X^2 + 1$ aus $\mathbb{R}[X]$ teilerfremd sind, d.h. $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Finden Sie Polynome $a, b \in \mathbb{R}[X]$ derart, dass $af + bg = 1$ gilt.

Aufgabe 2: Sei k ein Körper und α, β, γ drei verschiedene Elemente aus k. Zeigen Sie, dass es zu jedem Polynom $f \in k[X]$ Polynome $p, q, r \in k[X]$ gibt mit

$$f = (X - \beta)(X - \gamma)p + (X - \gamma)(X - \alpha)q + (X - \alpha)(X - \beta)r\,.$$

Hinweis: Von $(X-\beta)(X-\gamma)$, $(X-\gamma)(X-\alpha)$ und $(X-\alpha)(X-\beta)$ ausgehend könnten Sie ein geeignetes Ideal bilden und dann zeigen, dass 1 der normierte Erzeuger dieses Ideals ist.

Aufgabe 3: Sei k ein Körper und seien f, g, h Polynome aus $k[X]$ mit $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$. Zeigen Sie: ist h durch f und durch g teilbar, so ist h auch durch fg teilbar.

Aufgabe 4: Der Satz von Cayley–Hamilton besagt: ist $A \in M_n(k)$ eine quadratische Matrix, so ist $p_A(A) = 0$, d.h. das charakteristische Polynom von A verschwindet in A.

Weisen Sie den Fall $n = 2$ direkt nach.

Kritisieren Sie den folgenden (fehlerhaften) Beweis des Satzes von Cayley–Hamilton:

> Nach Definition ist $p_A(A) = \det(XE_n - A)$ für $X = A$, d.h. $p_A(A) = \det(AE_n - A) = \det(A - A) = \det(0) = 0$.