Matrikelnummer						Nachname	Punkte
						Vorname	

Aufgabe 1 *(10 Punkte)*

Wir definieren die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(A)$ einer Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ als die Menge aller endlichen Konvexkombinationen von Punkten aus A:

$$\operatorname{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ x_i \in A,\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Menge die kleinste konvexe Menge ist, welche A enthält, d. h. dass folgendes gilt:

(i) $\operatorname{conv}(A)$ konvex und $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$

(ii) $\forall C \subseteq \mathbb{R}^n :\quad C$ konvex und $A \subseteq C \quad \Rightarrow \quad \operatorname{conv}(A) \subseteq C$

(b) Begründen Sie, warum eine Menge durch die Eigenschaften (i) und (ii) eindeutig bestimmt ist.

(c) Geben Sie eine dritte äquivalente Definition der konvexen Hülle einer Menge an.

Musterlösung:

(a) Zu (i): Für zwei Elemente $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ und $x' = \sum_{j=1}^{n'} \lambda'_j x'_j$ aus $\operatorname{conv}(A)$ liegt auch jede Konvexkombination $\mu x + \mu' x' = \sum_{i=1}^{n} \mu\lambda_i x_i + \sum_{j=1}^{n'} \mu'\lambda'_j x'_j$ wieder in $\operatorname{conv}(A)$, denn $x_i, x'_j \in A$ und aus $\lambda_i, \lambda'_j \geq 0$ bzw. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n'} \lambda'_j = 1$ folgt $\mu\lambda_i, \mu'\lambda'_j \geq 0$ bzw.

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\lambda_i + \sum_{j=1}^{n'} \mu'\lambda'_j = \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i + \mu' \sum_{j=1}^{n'} \lambda'_j = \mu + \mu' = 1\,.$$

Somit ist $\operatorname{conv}(A)$ konvex. Die Inklusion $A \subseteq \operatorname{conv}(A)$ folgt aus der Definition von $\operatorname{conv}(A)$, wenn man $n = 1$ wählt.

Zu (ii): Sei C eine beliebige konvexe Menge mit $A \subseteq C$ sowie

$$\operatorname{conv}_n(A) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,\ \lambda_i \geqslant 0,\ x_i \in A \right\}$$

die Menge der Konvexkombinationen von genau n Punkten aus A. Durch Induktion über n zeigt man zunächst $\operatorname{conv}_n(A) \subseteq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt die Behauptung für $n = 0$, denn $\operatorname{conv}_0(A) = \varnothing \subseteq C$. Sei also $\operatorname{conv}_n(A) \subseteq C$. Wir wollen $\operatorname{conv}_{n+1}(A) \subseteq C$ zeigen, d. h. dass ein Element

$$x := \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in \operatorname{conv}_{n+1}(A)$$

in C liegt. Für $\lambda_{n+1} = 1$ ist $x = x_{n+1} \in A \subseteq C$. Wir können daher $\lambda_{n+1} \neq 1$ annehmen. Aus $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$ und der Induktionsannahme folgt, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j} x_i \in \operatorname{conv}_n(A) \subseteq C\,,$$

da die Koeffizienten sich zu 1 summieren. Dann ist aber wegen $x_{n+1} \in A \subseteq C$

$$x = (1 - \lambda_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{n+1}} x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}$$

eine Konvexkombination von Elementen aus C, also – weil C konvex – selbst wieder in C. Somit ist die Induktionsbehauptung gezeigt. Es ist also $\operatorname{conv}_n(A) \subseteq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich auch $\operatorname{conv}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{conv}_n(A) \subseteq C$.

(b) Es seien $\operatorname{conv}(A)$ und $\operatorname{conv}'(A)$ zwei Mengen mit den Eigenschaften (i) und (ii). Wir setzen $C := \operatorname{conv}(A)$. Nach Eigenschaft (i) für die Menge $\operatorname{conv}(A)$ gilt: C konvex und $A \subseteq C$. Nach Eigenschaft (ii) für die Menge $\operatorname{conv}'(A)$ gilt daher $\operatorname{conv}'(A) \subseteq C = \operatorname{conv}(A)$. Durch Vertauschung der Bezeichnungen erhält man die umgekehrte Inklusion $\operatorname{conv}'(A) \supseteq \operatorname{conv}(A)$. Damit ist $\operatorname{conv}'(A) = \operatorname{conv}(A)$.

(c)
$$\operatorname{conv}(A) := \bigcap_{C \text{ konvex},\ A\subseteq C} C$$

Matrikelnummer						Nachname	Punkte
						Vorname	

Aufgabe 2 *(8 Punkte)*

Geben Sie eine Basis der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ über $\mathbb{Q}$ an und begründen Sie Ihre Antwort.

Musterlösung:

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ist der kleinste Erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, welcher $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ enthält. Da es sich um einen Körper handelt, ist er abgeschlossen bzgl. Addition, Multiplikation und deren Inversenbildungen. Damit enthält er auch $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 = 5+2\sqrt{6}$, also auch $\sqrt{6}$ und somit auch $\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$. Eine zweifache Subtraktion von $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ liefert $\sqrt{2}$, eine dreifache $-\sqrt{3}$. Dies zeigt, dass

$$\mathbb{K} := \{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}\colon\ a,b,c,d \in \mathbb{Q}\} \quad \subseteq \quad \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\,.$$

Wie man leicht sieht, ist $\mathbb{K}$ abgeschlossen gegenüber Addition, Multiplikation und deren Inversenbildungen, also ein Körper (nämlich genau der aus Aufgabe 2 der 2. Übungsserie). Da $\mathbb{K}$ offensichtlich $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ enthält und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ der Schnitt aller Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, welche $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ enthalten, folgt $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{K}$. Beide Inklusionen ergeben $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = \mathbb{K}$. Eine Basis ist $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6}\}$.

Matrikelnummer						Nachname	Punkte
						Vorname	

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom sowie das Minimalpolynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 & -1 \\ -8 & 7 & 0 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

und bringen Sie diese auf Jordan-Normalform. Geben Sie auch eine zugehörige Basistransformation an.

Musterlösung:

Das charakteristische Polynom berechnet sich zu

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -5-\lambda & 5 & -1 \\ -8 & 7-\lambda & 0 \\ -4 & 4 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda - 1\,.$$

Durch Probieren erhält man z. B. $\lambda = +1$ als eine erste Nullstelle. Polynomdivision ergibt dann $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$. A besitzt also den zweifachen Eigenwert $\lambda = +1$ sowie den einfachen Eigenwert $\lambda = -1$. Da das Minimalpolynom das charakteristische Polynom teilt und $A \neq \pm I$ ist, kann das Minimalpolynom nur $(\lambda-1)(\lambda+1)$ oder $(\lambda-1)^2(\lambda+1)$ lauten. Ersteres schließt man durch

$$(A-I)(A+I) = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -1 \\ -8 & 6 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \neq 0$$

aus. A besitzt also einen 2×2-Jordan-Block zum Eigenwert $+1$ sowie einen 1×1-Block zum Eigenwert -1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung einer Basistransformation auf Jordan-Normalform berechnet man die verallgemeinerten Eigenräume zu

$$\ker(A+I) = \ker \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -8 & 8 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\ker(A-I)^2 = \ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & -4 & 8 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Als Basis wählt man etwa die Vektoren $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $(A-I)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -6 \\ -8 \\ -4 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Das ergibt die Transformationsmatrix

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eine Probe bestätigt, dass $U^{-1}AU$ gleich der oben angegebenen Jordan-Matrix ist. Das Minimalpolynom läßt sich alternativ auch im Nachhinein an der Jordan-Form ablesen.

Matrikelnummer						Nachname	Punkte
						Vorname	

Aufgabe 4 *(6 Punkte)*

Es sei A eine reelle $n \times n$-Matrix vom Rang r mit $A^2 = A$. Entscheiden Sie, ob A eine Jordan-Normalform besitzt und geben Sie diese gegebenenfalls an.

Musterlösung:

Erste Variante (reell): Offenbar annuliert das Polynom $\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ die Matrix A. Ist $A = 0$ oder $A = I$, so liegt A bereits in Jordan-Normalform vor (ist sogar diagonal). In allen anderen Fällen ist obiges Polynom das Minimalpolynom. Es zerfällt in die Linearfaktoren, weshalb A eine Jordan-Normalform J über $\mathbb{R}$ besitzt.

Es sei U die zugehörige Transformationsmatrix, d. h. $U^{-1}AU = J$. Dann gilt

$$J^2 = U^{-1}AUU^{-1}AU = U^{-1}A^2U = U^{-1}AU = J\,.$$

Blockdiagonale Matrizen multiplizieren sich blockweise. Für einen einzelnen $k \times k$-Jordan-Block stimmen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ & & & \lambda^2 & \lambda \\ & & & & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

nur dann überein, wenn $k = 1$ und $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$. J hat also nur 1×1-Jordan-Blöcke mit Einträgen 0 oder 1, d. h. A ist sogar diagonalisierbar und besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1. Eine Jordan-Normalform lautet damit

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der Einsen ist dabei gleich dem Rang r, die Anzahl der Nullen gleich $n - r$. Das schliesst auch die obigen Spezialfälle $A = 0$ und $A = I$ ein.

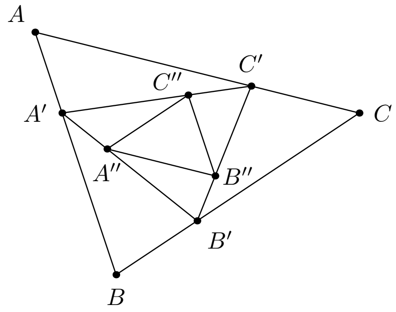
Zweite Variante (komplex): A besitzt eine Jordan-Normalform über $\mathbb{C}$. Wie bei der ersten Variante zeigt man, dass A über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist mit Eigenwerten 0 und 1. Diese sind reell. Also ist A auch über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar und besitzt obige Normalform.

Dritte Variante (Projektor): Eine Matrix A mit dieser Eigenschaft ist ein Projektor. Es ist $\mathbb{R}^n = \operatorname{im} A \oplus \ker A$, denn jeder Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ läßt sich eindeutig als $v = Av + (v - Av)$ zerlegen mit $Av \in \operatorname{im} A$ und $v - Av \in \ker A$, weil $A(v - Av) = Av - A^2v = 0$. Für $Av \in \operatorname{im} A$ gilt $A(Av) = A^2v = Av$, also wirkt A auf $\operatorname{im} A$ als identische Abbildung und auf $\ker A$ (nach Definition) als Nullabbildung. Wählt man eine Basis $\{e_1, \dots, e_r\}$ in $\operatorname{im} A$ sowie eine Basis $\{e_{r+1}, \dots, e_n\}$ in $\ker A$, so bildet $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, in der A obige Form annimt.

Matrikelnummer						Nachname	Punkte
						Vorname	

Aufgabe 5 *(6 Punkte)*

In einem Dreieck ABC seien A', B' und C' diejenigen Punkte, die die Seiten AB, BC bzw. CA im Verhältnis $1 : 2$ teilen. Ausgehend vom Dreieck $A'B'C'$ konstruiert man nun in gleicher Weise das Dreieck $A''B''C''$. Beweisen Sie, dass dessen Seiten parallel zu denen des Ausgangsdreiecks ABC sind und berechnen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von ABC und $A''B''C''$.



Musterlösung:

Erste Variante (analytische Geometrie): Es sei $\vec{a} := \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} := \overrightarrow{OB}$ und $\vec{c} := \overrightarrow{OC}$. Dann ist $\overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ und entsprechend $\overrightarrow{OB'} = \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$ sowie $\overrightarrow{OC'} = \frac{2}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a}$. In gleicher Weise ist

$$\overrightarrow{OA''} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{OA'} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{OB'} = \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{2}{3}\vec{a} + \tfrac{1}{3}\vec{b}\big) + \tfrac{1}{3}\big(\tfrac{2}{3}\vec{b} + \tfrac{1}{3}\vec{c}\big) = \tfrac{1}{9}\big(4\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}\big)$$

und somit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A''B''} &= \overrightarrow{OB''} - \overrightarrow{OA''} = \tfrac{1}{9}\big(4\vec{b} + 4\vec{c} + \vec{a}\big) - \tfrac{1}{9}\big(4\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}\big) = \tfrac{1}{3}\big(\vec{c} - \vec{a}\big)\\ &= \tfrac{1}{3}\big(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}\big) = \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}\,.\end{aligned}$$

Also ist $A''B''$ parallel zu AC. Entsprechendes gilt für die verbleibenden beiden Seiten. Das Dreieck $A''B''C''$ ist also ähnlich zum Ausgangsdreieck ABC mit Streckungsfaktor $\frac{1}{3}$, das gesuchte Flächenverhältnis beträgt $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.

Zweite Variante (affine Geometrie): Offenbar sind alle Eigenschaften in der Aufgabenstellung (Seitenverhältnisse, Flächenverhältnisse, Parallelität) affine Eigenschaften. Weiterhin ist bekannt, dass sich jedes Dreieck durch eine Affinität auf ein beliebiges anderes Dreieck abbilden läßt. Man kann deshalb ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass es sich bei dem Dreieck ABC um ein gleichseitiges Dreieck der Seitenlänge 1 handelt.

Es sei F der Fußpunkt der Höhe von C auf AB. Dann ist wegen

$$\frac{|AA'|}{|AF|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} = \frac{|AC'|}{|AC|}$$

nach dem Strahlensatz die Seite $C'A'$ parallel zur Höhe CF, steht also senkrecht auf AB. Ebenso ist $B''C''$ senkrecht zu $C'A'$ und somit parallel zu AB. Entsprechendes gilt für die verbleibenden Seiten.

Nach dem Satz des Pythagoras gilt $|A'B'|^2 = |A'B|^2 - |BB'|^2 = (\frac{2}{3})^2 - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{3}$. Damit ist $|A'B'| = \frac{1}{\sqrt{3}}|AB|$ sowie $|A''B''| = \frac{1}{\sqrt{3}}|A'B'| = \frac{1}{3}|AB|$ und das gesuchte Flächenverhältnis beträgt $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$.