Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 Lösungen zu Übungsblatt 13

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: (*) Sei B eine Basis des n-dimensionalen k-Vektorraums V. Zeigen Sie: Zu jeder invertierbaren Matrix $T \in M_n(k)$ gibt es eine Basis C des V derart, dass die Basiswechselmatrix ${}_B\mathrm{M}_C(\mathrm{Id}) = T$ erfüllt.

Lösung: Die Basiswechselmatrix war so konstruiert, dass die Koeffizienten der Bilder der Basisvektoren aus B als Linearkombinationen der Basisvektoren aus C als Spaltenvektoren geschrieben werden.
Wenn wir nun die Basisvektoren aus B als Spalten einer Matrix B' auffassen, dann sind die Basisvektoren aus C die Zeilen der Matrix C' mit der Eigenschaft, dass $B' = C'T$, denn dann ist jede Spalte in B' die Linearkombination der Zeilen aus C' mit Koeffizienten in einer Spalte in T.
Daher ist dann $B'T^{-1} = C'$. Da B einer Basis ist, können wir die Matrix der Vektoren in B ausgedrückt in der Basis B als der Identitätsmatrix hinschreiben, d.h. $B' = \mathrm{Id}$. Dann ist $C' = T^{-1}$, und wir haben schlicht und einfach dass der Basis C aus der Zeilenvektoren aus T^{-1} entsteht.

Aufgabe 2: Diagonalisieren Sie die reelle Matrix A oder zeigen Sie, dass sie nicht diagonalisierbar ist. Finden Sie ggf. eine invertierbare Matrix T derart, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

a) (4 P.) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) (4 BP.) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ c*) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Mögliche Vorgehensweise: Berechnen Sie das charakteristische Polynom, so finden Sie alle Eigenwerte. Mittels Gauß-Elimination berechnen Sie dann eine Basis jedes Eigenraums.

Lösung:

a) Um Diagonalisierbarkeit zu prüfen, berechnen wir alle Eigenwerte der Matrix. Ein Eigenwert ist 1, denn die mittlere Zeile hat nur ein Eintrag auf der Diagonale, namens 1. Da, nun, aber, die erste und letzte Spalte Multipeln von einander sind ist auch der Matrix als solches nicht von vollem Rank, und daher ist auch 0 ein Eigenwert. Es bleibt uns die Frage ob weitere Eigenwerte auftauchen.

Betrachten wir die Nullstellen vom charakteristischen Polynom, d.h. wir berechnen

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} X-3 & 1 & 3 \\ 0 & X-1 & 0 \\ -2 & 1 & X+2 \end{pmatrix} &= (X-1)\det\begin{pmatrix} X-3 & 3 \\ -2 & X+2 \end{pmatrix} = (X-1)(X-3)(X+2)+6(X-1) \\
&= X^3 - X^2 - 3X^2 + 2X^2 + 3X - 2X - 6X + 6 + 6X - 6 \\
&= X^3 - 2X^2 + X = X(X^2-2X+1) = X(X-1)^2
\end{aligned}$$

Aus der Faktorisierung am Ende können wir feststellen, dass wir nur zwei verschiedene Eigenwerte haben. Ist nun der Eigenraum E_1 zweidimensional, dann können wir immer noch einer Basis aus Eigenvektoren finden, also wollen wir dieses finden. Dazu betrachten wir der Kern zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Da hier der erste und letzte Zeile identisch sind, hat der Matrix nur einem Pivot, und daher Rank 1. Daher hat es zugleich einem Kern mit Dimension 2, gegeben durch einer Basis, der mit Vektoren (x, y, z) gegeben ist, die $2x - y - 3z = 0$ oder $2x = y + 3z$ erfüllen. Wir können für zwei linear unabhängige Vektoren einmal $y = 0, z = 2$ und einmal $y = 2, z = 0$ wählen, welches uns die Vektoren $(3, 0, 2)$ und $(1, 2, 0)$ ergibt. Für das Eigenwert 0 haben wir dann der Kern der Ursprungsmatrix zu berechnen, welches sich mit der Gauß'sche Algorithmus tun lässt, in dem wir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

berechnen, für $\alpha = (-1) - \frac{2}{3}(-1) = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$. Daher haben wir zwei Pivots, Rank 2, Kern 1-dimensional, und der Basis ist ein Vektor (x, y, z) mit $y = 0$ und $3x - y - 3z = 0$, und somit z.B. durch $(1, 0, 1)$ gegeben.

Nun können wir schliesslich feststellen, dass $(3, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$ und $(1, 0, 1)$ einen Basis ergibt, und mit

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

was uns die Diagonalisierung durchführt.

b) Die erste und letzte Zeile sind gleich, daher ist 0 ein Eigenwert zur Matrix. Mit der Gauß'sche Algorithmus können wir die Kern berechnen:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

welches uns zwei Pivots ergibt, mit Basis für den Eigenraum durch $(1,0,1)$ gegeben.

Für weitere Eigenwerte berechnen wir das charakteristische Polynom

$$
\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} X+3 & 2 & -3 \\ -2 & X-2 & 2 \\ 3 & 2 & X-3 \end{pmatrix} \\
&= (X+3)(X-2)(X-3) + 2\cdot 2\cdot 3 + (-3)\cdot(-2)\cdot 2 - (2\cdot 2\cdot (X+3) + 3\cdot(-3)\cdot(X-2) + 2\cdot(-2)\cdot(X-3)) \\
&= (X-2)(X^2-9) + 12 + 12 - 4(X+3) + 9(X-2) + 4(X-3) \\
&= X^3 - 2X^2 - 9X + 18 + 12 + 12 - 4X - 12 + 9X - 18 + 4X - 12 \\
&= X^3 - 2X^2 = X^2(X-2)
\end{aligned}
$$

Da erhalten wir noch eine Eigenwert 2. Für dieses Eigenraum benötigen wir den Kern vom

$$
\begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

mit zwei Pivots, und somit Rank 2. Das heisst nun dass die Eigenwerte nur ein Teilraum aufspannen, und somit das der Matrix nicht diagonalisierbar ist.

c) Hier können wir die Eigenwerte gleich ablesen, denn der Matrix ist schon in obere Dreiecksgestalt: die sind 1, 3 und -1. Weiterhin können wir die Gauß'sche Algorithmus fortsetzen, und erhalten ein Diagonalmatrix, in dem wir die Zeilenzüge entsprechend der Matrizen

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und danach } \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

ausführen. Das Ergebnis der Multiplikation diese beide Matrizen gibt uns die T als

$$
T = \begin{pmatrix} 1 & -4/3 & -31/3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

und die diagonalisierte Matrix als

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
$$

Aufgabe 3: Führen Sie das Gram–Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren aus, um eine Orthonormalbasis von V zu bekommen:

a) (4 P.) $V = \mathrm{Spann}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \subseteq \mathbb{R}^5$ für $u_1 = (1,1,1,0,1)$, $u_2 = (-1,1,0,1,-1)$, $u_3 = (0,2,1,1,0)$, $u_4 = (1,-2,-1,-1,1)$, $u_5 = (2,1,3,-2,2)$.

Evtl. erhalten Sie unerwartet den Nullvektor. Dies muss nicht bedeuten, dass Sie sich verrechnet haben. Können Sie diesen Fall deuten?

b) (4 BP.) $V = \text{Spann}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{C}^4$ für
$u_1 = (1, i, 0, 1)$, $u_2 = (2 + i, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 2 - i)$.

Lösung:

a) Erstens setzten wir $w_1 = u_1$ und berechnen $\langle w_1, w_1 \rangle = 4$.

Als nächste Schritt berechnen wir $w_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = (-1, 1, 0, 1, -1) - \frac{-1}{4}(1, 1, 1, 0, 1) = (-1, 1, 0, 1, -1) + \frac{1}{4}(1, 1, 1, 0, 1) = (-\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{1}{4}, 1, -\frac{3}{4})$ und $\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{9}{16} + \frac{25}{16} + \frac{1}{16} + \frac{16}{16} + \frac{9}{16} = \frac{60}{16} = \frac{15}{4}$.

Nun berechnen wir $w_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = u_3 - \frac{3}{4} w_1 - \frac{15/4}{15/4} w_2 = u_3 - \frac{3}{4} w_1 - w_2 = (0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}, 2 - \frac{3}{4} - \frac{5}{4}, 1 - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}, 1 - 1, 0 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4}) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

Als nächstes berechnen wir $w_4 = u_4 - \frac{\langle u_4, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle u_4, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = u_4 - \frac{-1}{4} w_1 - \frac{-21/4}{15/4} w_2 = u_4 + \frac{1}{4} w_1 + \frac{7}{5} w_2 = (1 + \frac{1}{4} - \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}, -2 + \frac{1}{4} + \frac{7}{5} \cdot \frac{5}{4}, -1 + \frac{1}{4} + \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{4}, -1 + \frac{7}{5}, 1 + \frac{1}{4} - \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{4}) = (\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ und $\langle w_4, w_4 \rangle = \frac{2}{5}$.

Zum Schluss müssen wir $w_5 = u_5 - \frac{\langle u_5, w_1 \rangle}{w_1, w_1} w_1 - \frac{\langle u_5, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 - \frac{u_5, w_4 \rangle}{\langle w_4, w_4 \rangle} w_4 = u_5 - \frac{8}{4} w_1 - \frac{-3}{15/4} w_2 - \frac{-6/5}{2/5} w_4 = u_5 - 2w_1 + \frac{3}{5} w_2 + 3w_4 = (2 - 2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{5}, 1 - 2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{4}, 3 - 2 + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{-2}{5}, -2 + \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{2}{5}, 2 - 2 - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{5}) = (\frac{3}{20}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{20})$ und $\langle w_5, w_5 \rangle = \frac{3}{20}$ berechnen.

Das Verfahren gibt uns zum Schluss eine Orthonormalisierte Basis von

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 0, 1) \\
v_2 &= \frac{1}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \frac{1}{\sqrt{60}}(-3, 5, 1, 4, -3) \\
v_3 &= \frac{1}{\langle w_4, w_4 \rangle} w_4 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 0, -2, 2, 1) \\
v_4 &= \frac{1}{\langle w_5, w_5 \rangle} w_5 = \frac{1}{\sqrt{60}}(3, -5, -1, -4, 3)
\end{aligned}
$$

wobei ja $v_4 = -v_2$ einfach weggelassen werden kann, und dadurch v_1, v_2, v_3 die Basis entspricht.

Nun, die auftauchende Null-vektor liegt daran, dass u_3 schon in $\text{Spann}(w_1, w_2)$ enthalten war, und daher als die jeweiligen Komponente abgezogen wurden, die gesamte Vektor verschwand.

b) Als Erinnerung, die übliche Skalarprodukt auf einer komplexen Vektorraum ist $\langle v, w \rangle = \sum_i v_i \bar{w}_i$.

Wir setzen zuerst $w_1 = u_1$, und berechnen $\langle w_1, w_1 \rangle = 1 + i(-i) + 0 + 1 = 3$.

Danach berechnen wir $\langle u_2, w_1 \rangle = (2 + i) \cdot 1 + 0 \cdot i + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 2 + i$ und $w_2 = u_2 - \frac{2+i}{w}{}_1 = \frac{1}{3}(4 + 2i, (1 - 2i), 3, -2 - i)$ und $\langle w_2, w_2 \rangle = \frac{13}{3}$.

Letztlich berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\langle u_3, w_1 \rangle &= 2 - 2i \\
\langle u_3, w_2 \rangle &= \frac{1}{3} - 2i \\
w_3 &= u_3 - \frac{2 - 2i}{3} w_1 - \frac{1}{13}(1 + 6i) w_2 \\
&= \frac{1}{13}(-6, 10i, 12 - 6i, 16) \\
\langle w_3, w_3 \rangle &= \frac{44}{13}
\end{aligned}
$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\sqrt{\langle w_1, w_1\rangle}} w_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, i, 0, 1) \\
v_2 &= \frac{1}{\sqrt{\langle w_2, w_2\rangle}} w_2 = \frac{1}{\sqrt{39}}(4+2i, 1-2i, 3, -2-i) \\
v_3 &= \frac{1}{\sqrt{\langle w_3, w_3\rangle}} w_3 = \frac{1}{\sqrt{572}}(-6, 10i, 12-6i, 16)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (*) Angenommen: Der reelle Vektorraum V hat zwei Skalarprodukte $\langle,\rangle$ und $\langle,\rangle'$; und für jedes $v \in V$ ist $\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle'$. Zeigen Sie, dass die beiden Skalarprodukte gleich sind.

Lösung: Angenommen für $v, w \in V$ gilt $\langle v, w\rangle \neq \langle v, w\rangle'$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle v+w, v+w\rangle - \langle v+w, v+w\rangle' &= \langle v, v\rangle + \langle v, w\rangle + \langle w, v\rangle + \langle w, w\rangle - \langle v, v\rangle' - \langle v, w\rangle' - \langle w, v\rangle' - \langle w, w\rangle' \\
&= (\langle v, v\rangle - \langle v, v\rangle') + (\langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle') + (\langle w, v\rangle - \langle w, v\rangle') + (\langle w, w\rangle - \langle w, w\rangle') \\
&= 0 + 2(\langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle') + 0
\end{aligned}$$

und da nun $\langle v, w\rangle \neq \langle v, w\rangle'$, dies ist $\neq 0$. Also ist $\langle v+w, v+w\rangle - \langle v+w, v+w\rangle' \neq 0$, und damit $\langle v+w, v+w\rangle \neq \langle v+w, v+w\rangle'$. Widerspruch, und damit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 5: (*) Zeigen Sie, dass

$$\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2)\rangle = z_1\bar{w}_1 - z_1\bar{w}_2 - z_2\bar{w}_1 + 2z_2\bar{w}_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ist; und dass der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2-2i & 4i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix}$ gegebene Endomorphismus des $\mathbb{C}^2$ selbstadjungiert ist bezüglich dieses Skalarprodukts.

Lösung: Linearität der ersten Stelle:

$$\begin{aligned}
\langle \lambda u + \mu v, w\rangle &= \langle (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2), (w_1, w_2)\rangle \\
&= (\lambda u_1 + \mu v_1)\bar{w}_1 - (\lambda u_1 + \mu v_1)\bar{w}_2 - (\lambda u_2 + \mu v_2)\bar{w}_1 + 2(\lambda u_2 + \mu v_2)\bar{w}_2 \\
&= (\lambda u_1\bar{w}_1 - \lambda u_1\bar{w}_2 - \lambda u_2\bar{w}_1 + 2\lambda u_2\bar{w}_2) + (\mu v_1\bar{w}_1 - \mu v_1\bar{w}_2 - \mu v_2\bar{w}_1 + 2\mu v_2\bar{w}_2) \\
&= \lambda(u_1\bar{w}_1 - u_1\bar{w}_2 - u_2\bar{w}_1 + 2u_2\bar{w}_2) + \mu(v_1\bar{w}_1 - v_1\bar{w}_2 - v_2\bar{w}_1 + 2v_2\bar{w}_2) \\
&= \lambda\langle u, w\rangle + \mu\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

Antilinearität der zweiten Stelle:

$$\begin{aligned}
\langle u, \lambda v + \mu w\rangle &= \langle (u_1, u_2), (\lambda v_1 + \mu w_1, \lambda v_2 + \mu w_2)\rangle \\
&= u_1 + \overline{(\lambda v_1 + \mu w_1)} - u_1\overline{(\lambda v_2 + \mu w_2)} - u_2\overline{(\lambda v_1 + \mu w_1)} + 2u_2\overline{(\lambda v_2 + \mu w_2)} \\
&= (u_1\overline{\lambda v_1} - u_1\overline{\lambda v_2} - u_2\overline{\lambda v_1} + 2u_2\overline{\lambda v_2}) + (u_1\overline{\mu w_1} - u_1\overline{\mu w_2} - u_2\overline{\mu w_1} + 2u_2\overline{\mu w_2}) \\
&= \bar{\lambda}(u_1 v_1 - u_1 v_2 - u_2 v_1 + 2u_2 v_2) + \bar{\mu}(u_1 w_1 - u_1 w_2 - u_2 w_1 + 2u_2 w_2) \\
&= \bar{\lambda}\langle u, w\rangle + \bar{\mu}\langle v, w\rangle
\end{aligned}$$

Antikommutativität:

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle &= v_1\bar{w}_1 - v_1\bar{w}_2 - v_2\bar{w}_1 + 2v_2\bar{w}_2\\ &= \bar{w}_1\overline{\overline{v_1}} - \bar{w}_1\overline{\overline{v_2}} - \bar{w}_2\overline{\overline{v_1}} + 2\bar{w}_2\overline{\overline{v_2}}\\ &= \overline{(w_1\bar{v}_1 - w_1\bar{v}_2 - w_2\bar{v}_1 + 2w_2\bar{v}_2)}\\ &= \overline{\langle w,v\rangle}\end{aligned}$$

Positiv definit, hierbei lassen wir $v_1 = x_1 + iy_1$ und $v_2 = x_2 + iy_2$:

$$\begin{aligned}\langle v,v\rangle &= v_1\bar{v}_1 - v_1\bar{v}_2 - v_2\bar{v}_1 + 2v_2\bar{v}_2\\ &= |v_1| - (x_1+iy_1)(x_2-iy_2) - (x_2+iy_2)(x_1-iy_1) + 2|v_2|\\ &= |v_1| + 2|v_2| - (x_1x_2 + y_1y_2 + x_2x_1 + y_2y_1) - i(x_2y_1 - x_1y_2 + x_1y_2 - x_2y_1)\\ &= |v_1| + 2|v_2| - 2(x_1x_2 + y_1y_2)\\ &= x_1^2 + y_1^2 + 2x_2^2 + 2y_2^2 - 2x_1x_2 - 2y_1y_2\\ &= (x_1-x_2)^2 + x_2^2 + (y_1-y_2)^2 + y_2^2\end{aligned}$$

Und da dieses eine Summe von Quadraten von Realzahlen ist, ist es auch positiv.
Die selbstadjunktion der gegebene Matrix heisst dass $\langle F(u),v\rangle = \langle u,\bar{F}(v)\rangle$. Um die Berechnungen zu vereinfachen finden wir zuerst eine orthonormale Basis für $\mathbb{C}^2$. Als v_1 nehmen wir $(1,0)$. Nun ist dann $\langle v_1,v_1\rangle = 1-0-0+2\cdot 0 = 1$ und $\langle v_1,(0,1)\rangle = 1\cdot 0 - 1\cdot 1 - 0\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 = -1$, und somit erhalten wir $v_2 = (0,1) - \frac{-1}{1}v_1 = (1,1)$. Schliesslich ist $\langle v_2,v_2\rangle = 1-1-1+2\cdot 1\cdot 1 = 1$, und somit ist $(1,0),(1,1)$ eine orthonormale Basis.
Nun ist $Fv_1 = (2-2i, 1-2i)$ und $Fv_2 = (2+2i,1)$, oder auch $Fv_1 = v_1 + (1-2i)v_2$, $Fv_2 = (1+2i)v_1 + v_2$. Berechnen wir nun

$$\begin{aligned}\langle Fv_1,v_1\rangle &= \langle v_1 + (1-2i)v_2, v_1\rangle = \langle v_1,v_1\rangle + (1-2i)\langle v_2,v_1\rangle\\ &= 1 + (1-2i)\cdot 0 = 1\\ \langle v_1,Fv_1\rangle &= \overline{\langle Fv_1,v_1\rangle} = \bar{1} = 1\\ \langle Fv_1,v_2\rangle &= \langle v_1 + (1-2i)v_2, v_2\rangle = \langle v_1,v_2\rangle + (1-2i)\langle v_2,v_2\rangle\\ &= 0 + (1-2i) = 1-2i\\ \langle v_1,Fv_2\rangle &= \langle v_1,(1+2i)v_1 + v_2\rangle = (1-2i)\langle v_1,v_1\rangle + \langle v_1,v_2\rangle\\ &= (1-2i) + 0 = 1-2i\\ \langle Fv_2,v_1\rangle &= \overline{\langle v_1,Fv_2\rangle}\\ &= \overline{1-2i} = 1+2i\\ \langle v_2,Fv_1\rangle &= \overline{\langle Fv_1,v_2\rangle}\\ &= \overline{1-2i} = 1+2i\\ \langle Fv_2,v_2\rangle &= \langle (1+2i)v_1 + v_2, v_2\rangle\\ &= (1+2i)\langle v_1,v_2\rangle + \langle v_2,v_2\rangle = (1+2i)\cdot 0 + 1 = 1\\ \langle v_2,Fv_2\rangle &= \overline{\langle Fv_2,v_2\rangle} = \bar{1} = 1\end{aligned}$$

Bei linearität folgt dann auch gleich dass $\langle Fv, u\rangle = \langle v, Fu\rangle$, für alle $u, v \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 6: Finden Sie eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren für die angegebene Matrix besteht.

a) (4 P.) $A = \begin{pmatrix} -2 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

b) (4 P.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

c) (4 BP.) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Lösung:

a) Als erstes finden wir eine Basis aus Eigenvektoren, in dem wir losrechnen: das charakteristische Polynom ist $(x+2)^2 + i^2 = x^2 + 4x + 3$ mit Nullstellen in -1 und -3, und daher auch diese beide Eigenwerte.

Die jeweiligen Eigenvektoren finden wir in dem wir die Kerne zu den Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{smallmatrix}\right)$ finden. Diese sind jeweils 1-dimensional, und gegeben durch (x, y) die, jeweils,

$$\begin{cases} -x + iy = 0 \\ -ix - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + iy = 0 \\ -ix + y = 0 \end{cases}$$

Setzen wir $y = 1$ im ersten Fall, dann ist laut der ersten Gleichung $x = iy = i$. Die zweite Gleichung ist dadurch $-i^2 - 1 = 0$, was auch stimmt, und somit ist $(i, 1)$ eine Basis für den ersten Eigenraum.

Setzen wir $x = 1$ im zweiten Fall, dann ist laut der zweiten Gleichung $y = i$. Diese Werte stimmen auch mit der ersten Gleichung überein, denn $1 + i^2 = 0$. Also ist $(1, i)$ eine Basis für den zweiten Eigenraum.

Diese sind schon orthogonal, denn es gilt $\langle (i,1), (1,i)\rangle = i \cdot 1 + 1 \cdot \bar{\imath} = i - i = 0$. Um eine Orthonormalbasis zu erhalten müssen wir jede der Vektoren mit seiner Länge multiplizieren - $\langle (1,i), (1,i)\rangle = 1 + i \cdot \bar{\imath} = 1 - (-i^2) = 2$, und somit ist

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, i) \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(i, 1)$$

die gesuchte Basis.

b) Das charakteristische Polynom erhalten wir durch

$$\det \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+1 \end{pmatrix} = (x+1) \det \begin{pmatrix} x-2 & 2 \\ 2 & x+1 \end{pmatrix} = (x+1)(x-2)(x+1) - 4(x+1) = (x+1)((x-2)(x+1) - 4)$$

wobei $(x-2)(x+1) - 4 = x^2 - 2x + x - 2 - 4 = x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, und somit haben wir die Eigenwerte 3, -1 und -2.

Entsprechend suchen wir die Kerne der Matrizen

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei wir gleich erkennen können für den ersten Fall, dass $(2, 0, -1)$ ein Basis für den Kern, im zweiten $(0, 1, 0)$ ein Basis für den Kern und im dritten Fall $(1, 0, 2)$ als Basis für den Kern wirkt.

Da alle drei Vektoren von verschiedene Eigenräume kommen, sind sie auch orthogonal, und mussen nur normalisiert werden. Als Ergebnis kommt dann

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1) \\ v_2 &= (0, 1, 0) \\ v_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2) \end{aligned}$$

c) Wir fangen wieder an mit der Suche nach ein charakteristisches Polynom. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 1 & x-1 & 2 \\ 2 & 2 & x+2 \end{pmatrix} &= (x-1)^2(x+2) + 4 + 4 - (2 \cdot 2 \cdot (x-1) + 2 \cdot 2 \cdot (x-1) + (x+2)) \\ &= (x-1)^2(x+2) + 8 - 8(x-1) - (x+2) \\ &= (x-1)^2(x+2) + 8 - 8x + 8 - x - 2 \\ &= (x-1)^2(x+2) - 9x + 14 \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x+2) - 9x + 14 = x^3 - 2x^+x + 2x^2 - 4x + 2 - 9x + 14 \\ &= x^3 - 12x + 16 = (x+4)(x-2)^2 \end{aligned}$$

und wir erhalten die Eigenwerte -4 und 2.

Für -4 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dieser Matrix hat deutlich Rank 2 (spiegeln um der mittleren Spalte gibt uns ein Dreiecksgestalt mit zwei Pivots), und daher ist der Kern 1-dimensional, mit Basis ein (x, y, z) mit $x + y - z = 0$ und $x - y = 0$. Da $x - y = 0$ gilt $x = y$, und aus $x + y - z = 0$ folgt $x + y = z$. Daher ist $(1, 1, 2)$ eine Lösung des Gleichungssystems, und damit auch ein Basis für den Kern.

Für 2 berechnen wir den Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit Rank 1, damit ein 2-dimensionaler Kern. Dieser besteht aus Lösungen der Gleichung $x+y+2z=0$, und wir erhalten einen Basis dadurch, dass wir erst $x=2$, $y=0$ wählen und dann $y=2$, $x=0$. Das gibt uns den Basisvektoren $u_1=(-2,0,1)$ und $u_2=(0,-2,1)$.

Diese aber sind nicht orthogonal, denn $\langle u_1,u_2\rangle = 1 \neq 0$. Also müssen wir sie orthogonalisieren – welches durch den Gram-Schmidt Algorithmus folgt.

Wir setzen $w_1=u_1$, und dann $w_2=u_2-\frac{\langle u_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1=u_2-\frac{1}{5}u_1=(\frac{2}{5},-2,\frac{4}{5})$.

Letzlich normalisieren wir die Vektoren, und erhalten

$$\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)\\
v_2 &= \frac{1}{2\sqrt{30}}(2,-10,4)\\
v_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)
\end{aligned}$$

Erreichbare Punktzahl: 16