Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 13

Abgabe: Mi 24.01.2007 in der Vorlesung. **Diese Übungsserie ist die letzte benotete!**

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: (*) Sei B eine Basis des n-dimensionalen k-Vektorraums V. Zeigen Sie: Zu jeder invertierbaren Matrix $T \in M_n(k)$ gibt es eine Basis C des V derart, dass die Basiswechselmatrix ${}_B\mathrm{M}_C(\mathrm{Id}) = T$ erfüllt.

Aufgabe 2: Diagonalisieren Sie die reelle Matrix A oder zeigen Sie, dass sie nicht diagonalisierbar ist. Finden Sie ggf. eine invertierbare Matrix T derart, dass $T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist, und geben Sie diese Diagonalmatrix an.

a) (4 P.) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ b) (4 BP.) $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ c*) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Mögliche Vorgehensweise: Berechnen Sie das charakteristische Polynom, so finden Sie alle Eigenwerte. Mittels Gauß-Elimination berechnen Sie dann eine Basis jedes Eigenraums.

Aufgabe 3: Führen Sie das Gram–Schmidt-Orthonormalisierungsverfahren aus, um eine Orthonormalbasis von V zu bekommen:

a) (4 P.) $V = \mathrm{Spann}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \subseteq \mathbb{R}^5$ für $u_1 = (1,1,1,0,1)$, $u_2 = (-1,1,0,1,-1)$, $u_3 = (0,2,1,1,0)$, $u_4 = (1,-2,-1,-1,1)$, $u_5 = (2,1,3,-2,2)$.

Evtl. erhalten Sie unerwartet den Nullvektor. Dies muss nicht bedeuten, dass Sie sich verrechnet haben. Können Sie diesen Fall deuten?

b) (4 BP.) $V = \mathrm{Spann}(u_1, u_2, u_3) \subseteq \mathbb{C}^4$ für $u_1 = (1, i, 0, 1)$, $u_2 = (2 + i, 0, 1, 0)$, $u_3 = (0, 1, 1, 2 - i)$.

Aufgabe 4: (*) Angenommen: Der reelle Vektorraum V hat zwei Skalarprodukte $\langle , \rangle$ und $\langle , \rangle'$; und für jedes $v \in V$ ist $\langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle'$. Zeigen Sie, dass die beiden Skalarprodukte gleich sind.

Aufgabe 5: (*) Zeigen Sie, dass

$$\langle (z_1, z_2), (w_1, w_2)\rangle = z_1\bar{w}_1 - z_1\bar{w}_2 - z_2\bar{w}_1 + 2z_2\bar{w}_2$$

ein Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$ ist; und dass der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2-2i & 4i \\ 1-2i & 2i \end{pmatrix}$ gegebene Endomorphismus des $\mathbb{C}^2$ selbstadjungiert ist bezüglich dieses Skalarprodukts.

Aufgabe 6: Finden Sie eine Orthonormalbasis, die aus Eigenvektoren für die angegebene Matrix besteht.

a) (4 P.) $A = \begin{pmatrix} -2 & i \\ -i & -2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$.

b) (4 P.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

c) (4 BP.) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16