Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 12

Meistens ist k ein Körper und V ein Vektorraum.
Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: Ist v ein Eigenvektor von A? Geben Sie ggf. den Eigenwert an.

a) (1 P.) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) (1 P.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) (*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung:

a) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$. Da dieses kein Skalarmultipel von v ist, ist v kein Eigenvektor.

b) $A \cdot v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor mit Eigenwert 2.

c) Die Definition von Eigenvektoren schliesst den Fall $v = 0$ aus. Daher ist es kein Eigenvektor, obwohl $A \cdot v = v$.

Aufgabe 2: (3 P.) Finden Sie eine Basis des Eigenraums $E_{-2}(A)$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Lösung: Das Eigenraum $E_{-2}(A)$ ist genau der Kern von $A + 2\,\mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, und durch betrachten diese Matrix können wir feststellen, dass nur der erste Zeile Relevant ist. Der Matrix hat daher Rang 1. Durch Addition der erste Zeile auf der letzten, erhalten wir die einzige Pivot, und können gleich die Vektoren im Eigenraum beschreiben als $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mit $5x + y + 2z = 0$. Hier können wir z.B. x und z frei wählen, und immer neue Vektoren im Raum durch diese Gleichung erhalten. Mit $x = 1$, $z = 0$ erhalten wir $\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, und mit $x = 0$, $z = 1$ erhalten wir $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Da wir nur einen Pivotpunkt haben ist der Nullraum 2-dimensional, und daher bilden diese beide Vektoren einen Basis für das Eigenraum.

Aufgabe 3: (3 BP.) Berechnen Sie das charakteristische Polynom dieser Matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Lösung: Das charakteristische Polynom von der Matrix A ist der Determinante von $x\,\mathrm{Id} - A$. Für diesen Fall wollen wir folgendes berechnen:

$$\begin{aligned}
&\det\begin{pmatrix} x-3 & -1 & -2 \\ -5 & x+1 & -2 \\ 5 & 1 & x+4 \end{pmatrix}\\
&= (x-3)(x+1)(x+4) + (-1)(-2)5 + (-2)(-5)1 - (-2)(x+1)5 - (-1)(-5)(x+4) - (x-3)(-2)1\\
&= x^3 - 3x^2 + x^2 + 4x^2 - 3x - 12x + 4x - 12 + 10 + 10 + 10(x+1) - 5(x+4) + 2(x-3)\\
&= x^3 + 2x^2 - 11x + 8 + 10x + 10 - 5x - 20 + 2x - 6\\
&= x^3 + 2x^2 - 4x - 8
\end{aligned}$$

Als Verifikation vom Ergebnis können wir Lemma 7.4 benutzen: das charakteristische Polynom wird auf der Form $x^3 - \mathrm{Spur}(A)x^2 + ax - \det(A)$ sein, mit a irgendein Zahl. In diesem Fall ist $\mathrm{Spur}(A) = 3 - 1 - 4 = -2$ und wir können $\det(A)$ berechnen als

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix} && \text{Erste Zeile auf zweite addiert}\\
&= \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix} && \text{Erste Zeile auf dritte Addiert}\\
&= -\det\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} && \text{Entwicklung nach der zweiten Spalte}\\
&= -(8\cdot(-2) - 4\cdot(-2)) = 8\cdot 2 - 4\cdot 2 = 16 - 8 = 8
\end{aligned}$$

und daher muss das charakteristische Polynom auf der Form $x^3 + 2x^2 + ax - 8$ sein, was gut mit unsere Berechnungen übereinstimmt.

Aufgabe 4: (5 P.) Bestimmen Sie alle Eigenwerte dieser Matrix, und bestimmen Sie eine Basis jedes Eigenraums.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Eigenwerte sind, nach Lemma 7.5 b), genau die Nullstellen vom charakteristischen Polynoms. Also fangen wir an mit der Berechnung von dieser.
Zu diesem Zwecke wollen wir

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & x-2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & x+2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & x-3 \end{pmatrix}$$

berechnen. Um dies zu tun können wir beobachten, dass wir eine geeignete Blockmatrix haben, und können deswegen einfach die Determinante

$$\det\begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} x+2 & -3 \\ 2 & x-3 \end{pmatrix}$$

berechnen und multiplizieren. Diese sind $(x-1)(x-2)$ bzw. $(x+2)(x-3)-(-3)\cdot 2 = x^2+2x-3x-6+6 = x^2-x$, was uns zu ein charakteristischen Polynoms von $x(x-1)^2(x-2)$ mit Nullstellen $0, 1, 2$ führt.
Und da die Nullstellen genau die Eigenwerte sind, haben wir jetzt alle Eigenwerte unserer Matrix erhalten.
Nun haben wir ja auch drei Eigenräume zu bestimmen. Wir berechnen sie in dieser Reihenfolge:
Für 1 suchen wir $\mathrm{Kern}(A - \mathrm{Id})$, und fangen an mit Zeilenoperationen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus das Ergebnis können wir herauslesen, dass der erste Variabel frei wählbar ist, und alle andere daraus folgen. Der Matrix hat Rang 3, und entspricht eine Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, hat daher eine 1-dimensionale Nullraum, das von $(1, 0, 0, 0)$ aufgespannt wird.
Für das Eigenwert 2 wollen wir der Kern vom $A - 2\,\mathrm{Id}$ bestimmen, und arbeiten wieder mit Zeilenoperationen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus können wir erstens der Matrixrang ablesen zu 3, was wiederum eine 1-dimensionale Kern impliziert. Weiterhin ist die zweite Spalte keine Pivotstelle, und daher die frei wählbare Variabel. Ein Basisvektor (x, y, z, w) hätte drei Bedingungen:

$$\begin{cases} -x + y + w = 0 \\ 2z + w = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Und aus $w = 0$ folgt $z = 0$, was uns mit z.B. $(1, 1, 0, 0)$ als Basis lässt.
Schliesslich haben wir den Eigenwert 0. Für diesen Fall betrachten wir den Ursprungsmatrix und will den Kern davon bestimmen. Wir fahren wieder mit Zeilenoperationen fort

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Was uns wieder einen 1-dimensionalen Kern andeutet. Diese hat als Basis ein (x, y, z, w) der die Bedingungen

$$\begin{cases} x + y + w = 0 \\ 2y + 2z + w = 0 \\ -2z + 3w = 0 \end{cases}$$

Setzen wir $w = 1$ folgt daraus $z = \frac{3}{2}$. Damit wird $2y = -2z - w = -4$, und so $y = -2$. Schliesslich ist $x = -y - w = 2 - 1 = 1$. Also bildet $(1, -2, \frac{3}{2}, 2)$ ein Basis.

Als Ergebnis haben wir diese Zuordnung zwischen Eigenwerte und Basen $\begin{array}{c|c} 0 & (1, -2, \frac{3}{2}, 2) \\ 1 & (1, 0, 0, 0) \\ 2 & (1, 1, 0, 0) \end{array}$

Aufgabe 5: (*) Die Eigenwerte einer Matrix in oberer Dreiecksgestalt lassen sich leicht ablesen. Wie macht man das, und wieso funktioniert es?

Lösung: Wenn A in oberer Dreiecksgestalt ist, dann ist auch $\lambda \operatorname{Id} - A$ in oberer Dreiecksgestalt. Daher ist $\det(\lambda \operatorname{Id} - A) = \prod_i (\lambda - a_{ii})$, mit Nullstellen genau die a_{ii}. Also stehen in ein solcher Matrix die Eigenwerte auf der Diagonale.

Aufgabe 6: (3 P.) Angenommen, $A, B \in M_n(k)$ sind kommutierende Matrizen: $AB = BA$, und außerdem hat B einen Eigenvektor v mit Eigenwert 3. Zeigen Sie, dass auch $A \cdot v$ im Eigenraum $E_3(B)$ liegt.

Lösung: $A \cdot v$ soll laut der Aussage in $E_3(B)$ liegen. Dass heisst das $B \cdot (A \cdot v) = 3 \cdot A \cdot v$. Nun ist aber $B \cdot (A \cdot v) = A \cdot (B \cdot v) = A \cdot (3v) = 3 \cdot A \cdot v$. Was die Aussage beweist.

Aufgabe 7: (3 P.) Sei $A \in M_3(k)$. Ist $A = 0$, so ist $p_A(X) = X^3$. Umgekehrt sei jetzt $p_A(X) = X^3$. Muss A die Nullmatrix sein?

Lösung: Nein, es kann auch zum Beispiel auf der Form $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ sein, denn dieser hat characteristisches Polynom $\det \left(\begin{smallmatrix} x & -a & -b \\ 0 & x & -c \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right) = x^3$ (obere Dreiecksgestalt).

Aufgabe 8: (2 BP.) Über die Matrix A und die Vektoren v, w ist bekannt: es ist $A \cdot v = 2v$, $A \cdot w = -5w$ und $A \cdot (v + w) = v + w$. Zeigen Sie, dass $v = w = 0$, ohne sich einfach auf das einschlägige Lemma aus der Vorlesung zu berufen.

Lösung: Aus der Linearität der Matrixmultiplikation wissen wir das $A\cdot(v+w) = A\cdot v + A\cdot w$. Andererseits wissen wir auch das es $v+w$ ist. Gleichstellung diese beide Ausdrücke gibt uns $A\cdot v + A\cdot w = v+w$. Nun wissen wir weiterhin was $A\cdot v$ und $A\cdot w$ sind, und können dieses einsetzen. Dann erhalten wir $2v - 5w = v + w$ oder $v - 6w = 0$ oder $v = 6w$. Da aber w ein Multipel von v ist, ist $A\cdot v = A\cdot(6w) = 6\cdot A\cdot w = -30w$. Andererseits ist $A \cdot v = 2v = 2 \cdot 6w = 12w$. Diese Ausdrücke müssen aber gleich sein, und somit ist $12w = -30w$ oder $w = 0$. Daraus folgt auch $v = 0$.

Erreichbare Punktzahl: 16