Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 12

Abgabe: Mi 17.01.2007 in der Vorlesung. Meistens ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: Ist v ein Eigenvektor von A? Geben Sie ggf. den Eigenwert an.

a) (1 P.) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) (1 P.) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) (*) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2: (3 P.) Finden Sie eine Basis des Eigenraums $E_{-2}(A)$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: (3 BP.) Berechnen Sie das charakteristische Polynom dieser Matrix: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 2 \\ -5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4: (5 P.) Bestimmen Sie alle Eigenwerte dieser Matrix, und bestimmen Sie eine Basis jedes Eigenraums. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5: (*) Die Eigenwerte einer Matrix in oberer Dreiecksgestalt lassen sich leicht ablesen. Wie macht man das, und wieso funktioniert es?

Aufgabe 6: (3 P.) Angenommen, $A, B \in M_n(k)$ sind kommutierende Matrizen: $AB = BA$, und außerdem hat B einen Eigenvektor v mit Eigenwert 3. Zeigen Sie, dass auch $A \cdot v$ im Eigenraum $E_3(B)$ liegt.

Aufgabe 7: (3 P.) Sei $A \in M_3(k)$. Ist $A = 0$, so ist $p_A(X) = X^3$. Umgekehrt sei jetzt $p_A(X) = X^3$. Muss A die Nullmatrix sein?

Aufgabe 8: (2 BP.) Über die Matrix A und die Vektoren v, w ist bekannt: es ist $A \cdot v = 2v$, $A \cdot w = -5w$ und $A \cdot (v + w) = v + w$. Zeigen Sie, dass $v = w = 0$, ohne sich einfach auf das einschlägige Lemma aus der Vorlesung zu berufen.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16