Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 Lösungen zu Übungsblatt 11

Meistens ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Determinante der angegebenen Matrix.

a) (2 P.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, $k = \mathbb{R}$ b) (2 BP.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $k = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

Lösung:

a) Es wird um einiges einfacher den Determinanten auszurechnen wenn wir zuerst unserem Matrix etwas vereinfachern. Dazu ist der Gauß'sche Algorithmus durchaus geeignet. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 9 & 28 \end{pmatrix}$$

und hier können wir den Matrix nach der ersten Spalte entwickeln. Dadurch kriegen wir den neuen Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 8 \\ 2 & 9 & 28 \end{pmatrix}$$

mit gleicher Determinant wie der Anfangsmatrix.

Dieser, wiederum, können wir nach der ersten Spalte entwickeln, und erhalten das Ausdruck

$$2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 9 & 28 \end{pmatrix} + 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

für unsere Determinante. Für 2x2-Matrizen haben wir ein Formel: $\det \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$, welcher wir nun ausnutzen können, denn unsere Determinante ist jetzt gleich

$$2 \cdot (3 \cdot 28 - 8 \cdot 9) + 2 \cdot (3 \cdot 8 - 4 \cdot 3) = 2 \cdot (84 - 72) + 2 \cdot (24 - 12) = 2 \cdot 12 + 2 \cdot 12 = 48$$

Alternativ können wir die Gauß'sche Algorithmus weiterführen, und erhalten

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & 9 & 28 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 6 & 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

und da dieses nun auf obere Dreiecksgestalt steht, ist die Determinante genau die Produkt der Diagonalelemente: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$.

Noch eine Möglichkeit ist das wir die mittlere Form oben nehmen, denn dieses ist ein Blockmatrix der Form $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$, und daher ist die Determinante genau die Produkt der Determinanten von $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 3 & 8 \\ 6 & 24 \end{smallmatrix}\right)$. Der erste diese beide hat mit gleichem Blockmatrix-argumentation Determinante 2, und der zweite hat Determinante $3 \cdot 24 - 8 \cdot 6 = 72 - 48 = 24$. Dies ergibt daher $2 \cdot 24 = 48$.

b) Wir ziehen die erste Zeile von den dritten ab, und erhalten die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit gleicher Determinante. Dieses können wir dann nach der dritten Zeile entwickeln, und erhalten als Determinante $-(1 \cdot 2 - 2 \cdot 2) = -(2 - 1) = -1 = 2$.

Wenn wir dies über etwa $\mathbb{R}$ tun wurden, wäre es $-(2 - 4) = -(-2) = 2$ als Ergebnis, und daher nicht viel anders als für $\mathbb{F}_3$.

Aufgabe 2: (3 P.) Gegeben seien linear unabhägige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Matrix $A \in M_5(\mathbb{R})$ gibt, die v_1, v_2, v_3 als ihre ersten drei Zeilen hat und außerdem $\det(A) = 1$ erfüllt.

Lösung: Wir können v_1, v_2, v_3 mit noch v_4, v_5 erweitern zu eine Basis von $\mathbb{R}^5$. Da diese Vektoren alle linear unabhängig sind, hat die Matrix V mit Zeilen den v_i eine nicht-null Determinante. Nehmen wir an dass diese Determinante das Wert d annimmt. Dann ist auch $v_1, v_2, v_3, v_4, \frac{1}{d}v_5$ eine Basis für $\mathbb{R}^5$, mit Determinante genau $d/d = 1$.

Aufgabe 3: (*) Zeigen Sie: Die Menge $SL_n(k) := \{A \in M_n(k) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

Lösung: Ist $\det(A) = 1$, dann ist $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1} = 1$. Also sind die Inversen enthalten in $SL_n(k)$. Sind $\det(A) = 1$ und $\det(B) = 1$, dann ist $\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1 \cdot 1 = 1$. Daher ist $SL_n(k)$ auch geschlossen unter Matrixmultiplikation, und damit eine Gruppe.

Aufgabe 4: Eine Matrix $A \in M_n(k)$ heißt *orthogonal*, falls $A \cdot A^T = E_n$ gilt.

a) (2 P.) Zeigen Sie: ist A orthogonal, so ist A invertierbar, $A^{-1} = A^T$, und $A^T \cdot A = E_n$.

b) (1 P.) Kann A orthogonal sein, ohne dass A^T gleichzeitig orthogonal sein muss?

c) (*) Zeigen Sie: ist A orthogonal, so ist $\det(A) = \pm 1$.

d) (2 BP.) Geben Sie konkrete Beispiele, um zu zeigen, dass einige aber nicht alle Matrizen in $M_2(\mathbb{R})$, deren Determinante -1 beträgt, orthogonal sind.

Lösung:

a) Ist A orthogonal, so ist $A \cdot A^T = E_n$, und daher ist A^T eine Rechtsinverse zu A. Dann, aber, ist durch die Eindeutigkeit von Inversen in Gruppen A^T wirklich genau A^{-1}, und so A invertierbar.

Alternativ können wir $A^{-1} - A^T$ betrachten. Da gilt

$$A^{-1} - A^T = E_n(A^{-1} - A^T) = A^{-1} \cdot A \cdot (A^{-1} - A^T) = A^{-1}(AA^{-1} - AA^T) = A^{-1}(E_n - E_n) = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

b) Da $A = (A^T)^T$ ist $E_n = A^T \cdot A = A^T \cdot (A^T)^T$, und somit ist auch A^T orthogonal.

c) Da $\det(A) = \det(A^T)$ muss $\det(A) \cdot \det(A) = 1$, und somit ist $\det(A) = \pm\sqrt{(}1) = \pm 1$.

d) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ist orthogonal mit Determinante -1. Jedoch gilt für $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ das die Determinante -1 beträgt, aber $A \cdot A^T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, und somit ist A nicht orthogonal.

Aufgabe 5: (3 P.) Was besagt die Regel von Sarrus für Determinanten von 2×2- und 3×3-Matrizen? (Schlagen Sie in einem Lehrbuch nach!) Sagen Sie, warum die Regel versagt für 4×4-Matrizen: diskutieren Sie einerseits die Permutationen, die nicht berücksichtigt werden; geben Sie andererseits eine konkrete 4×4-Matrix, für die die Regel versagt.

Lösung: Sarrus Regel besagt dass die Determinante für 2×2 und 3×3-Matrizen durch geeignete summieren von Diagonalprodukte mit Vorzeichen bestimmt von der Richtung der Diagonale berechnet werden kann.
Die Matrix aus 1a) ist ein Beispiel - erhält durch Sarrus eine Determinante von 120, hat aber in wirklichkeit eine Determinante von 48.
Grund des Versagens ist dass z.B. die Permutation (1 2 4 3) nicht als Diagonale in eine ergänzte Matrix darstellbar ist.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

a) (2 P.) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ b) (2 BP.) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ c) (*) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)$

Lösung:

a) Wir schreiben $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 3\ 4\ 5\ 2)$. Nun hat ein Zyklus von Länge n genau Vorzeichen $(-1)^{n-1}$, denn $(a_1 \cdots a_n)$ ist gleich die Produkt $(a_1 a_n)(a_1 a_{n-1}) \ldots (a_1 a_2)$ von $n-1$ Transpositionen. Daher hat die Permutation Vorzeichen $(-1)^{5-1} = (-1)^4 = +1$.

b) Wiederum schreiben wir $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 3\ 5\ 7)(2\ 4\ 6)$, und daher hat $(1\ 3\ 5\ 7)$ Vorzeichen -1 und $(2\ 4\ 6)$ $+1$. Die Produkt der Zyklen hat Vorzeichen der Produkte, daher -1.

c) Wir schreiben $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{smallmatrix}\right) = (1\ 5\ 4)(2\ 3\ 6)$, wo beide Zyklen Vorzeichen $+1$ haben. Daher hat auch die gesamte Permutation Vorzeichen $+1$.

Aufgabe 7: (3 P.) Bei ihrem letzten Streit haben Tweedledum und Tweedledee eine Ecke aus dem Blatt Papier gerissen, worauf Humpty Dumpty die Glücksbringer-Permutation seiner verstorbenen Großmutter väterlicherseits geschrieben hat. Alles, was noch zu lesen ist, ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & & \end{pmatrix}$. Zum Glück hatte Alice vorher bemerkt, dass das Vorzeichen -1 beträgt. Bitte versuchen Sie, dem armen Humpty zu helfen.

Lösung: Durch betrachten der Funktionsbilder, die aufgeführt sind, sehen wir dass alles davon abhängt ob $5 \to 6 \to 4$ oder $5 \to 4$ und $6 \to 6$. Das sind die zwei verbleibende Möglichkeiten, durch den die Abbildung bijektiv wird (denn $4, 6$ sind die einzige Punkte die nicht im Bild das lesbares liegt. Abhängig von unserer Wahl der Bild von 6 ergibt sich diese zwei).
Wir wissen ja auch was das Vorzeichen beträgt. Von daher können wir Vorzeichen berechnen für unsere beide Kandidaten, und von dort auf ein Schluss kommen.
Ist $5 \to 6 \to 4$, dann ist die Permutation genau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

und wir können es in der Zyklusform umschreiben zu $(1\ 5\ 6\ 4\ 2\ 3)$, ein Zyklus von Länge 6, und damit mit Vorzeichen $(-1)^5 = -1$.
Ist statt dessen $6 \to 6$ und $5 \to 4$, dann ist die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

oder genau $(1\ 5\ 4\ 2\ 3)$, ein Zyklus von Länge 5, mit Vorzeichen $(-1)^4 = +1$.

Erreichbare Punktzahl: 16