Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Übungsblatt 11

Abgabe: Mi 10.01.2007 in der Vorlesung. Meistens ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Determinante der angegebenen Matrix.

a) (2 P.) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ -1 & 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$, $k = \mathbb{R}$ b) (2 BP.) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $k = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$

Aufgabe 2: (3 P.) Gegeben seien linear unabhägige Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^5$. Zeigen Sie, dass es mindestens eine Matrix $A \in M_5(\mathbb{R})$ gibt, die v_1, v_2, v_3 als ihre ersten drei Zeilen hat und außerdem $\det(A) = 1$ erfüllt.

Aufgabe 3: (*) Zeigen Sie: Die Menge $SL_n(k) := \{A \in M_n(k) \mid \det(A) = 1\}$ ist eine Gruppe bezüglich Matrixmultiplikation.

Aufgabe 4: Eine Matrix $A \in M_n(k)$ heißt *orthogonal*, falls $A \cdot A^T = E_n$ gilt.

a) (2 P.) Zeigen Sie: ist A orthogonal, so ist A invertierbar, $A^{-1} = A^T$, und $A^T \cdot A = E_n$.

b) (1 P.) Kann A orthogonal sein, ohne dass A^T gleichzeitig orthogonal sein muss?

c) (*) Zeigen Sie: ist A orthogonal, so ist $\det(A) = \pm 1$.

d) (2 BP.) Geben Sie konkrete Beispiele, um zu zeigen, dass einige aber nicht alle Matrizen in $M_2(\mathbb{R})$, deren Determinante -1 beträgt, orthogonal sind.

Aufgabe 5: (3 P.) Was besagt die Regel von Sarrus für Determinanten von 2×2- und 3×3-Matrizen? (Schlagen Sie in einem Lehrbuch nach!) Sagen Sie, warum die Regel versagt für 4×4-Matrizen: diskutieren Sie einerseits die Permutationen, die nicht berücksichtigt werden; geben Sie andererseits eine konkrete 4×4-Matrix, für die die Regel versagt.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie das Vorzeichen der folgenden Permutationen:

a) (2 P.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ b) (2 BP.) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ c) (*) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: (3 P.) Bei ihrem letzten Streit haben Tweedledum und Tweedledee eine Ecke aus dem Blatt Papier gerissen, worauf Humpty Dumpty die Glucksbringer-Permutation seiner verstorbenen Großmutter väterlicherseits geschrieben hat. Alles, was noch zu lesen ist, ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & & \end{pmatrix}$. Zum Glück hatte Alice vorher bemerkt, dass das Vorzeichen -1 beträgt. Bitte versuchen Sie, dem armen Humpty zu helfen.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16