Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 Übungsblatt 10

Abgabe: Mi 20.12. in der Vorlesung. Meistens ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Zur Erinnerung: Mit allen regulären Punkte (2 P.) erreichen Sie 100%. Mit Bonuspunkten (3 BP.) können Sie mehr als 100% erreichen. Keine Punkte für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Rang dieser Matrizen:

a) (2 P.) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $k = \mathbb{R}$

b) (2 P.) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 6 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $k = \mathbb{R}$

c) (2 BP.) $C = \begin{pmatrix} 1 & i & 3+i \\ -2i & 2 & 2-6i \\ 2-i & 0 & 3i \end{pmatrix}$ $k = \mathbb{C}$

d) (*) $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $k = \mathbb{F}_2$

Aufgabe 2: In $\mathbb{R}^4$ sei $v_1 = (1, 2, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, -1, -1)$, $v_3 = (1, 1, 2, 1)$, $v_4 = (0, 1, 1, 1)$, $v_5 = (2, 3, 3, 2)$ und $V = \mathrm{Spann}(v_1, \dots, v_5)$.

a) (3 P.) Finden Sie eine Basis von V, indem Sie den Gauß-Algorithmus auf die Matrix $A \in M(5 \times 4, \mathbb{R})$ anwenden, deren Zeilen die Vektoren $v_1, \dots, v_5$ sind.

b) (3 P.) Finden Sie eine Basis von V, die aus einigen der Vektoren $v_1, \dots, v_5$ besteht. Wenden Sie hierfür den Gauß-Algorithmus auf die Matrix $B \in M(4 \times 5, \mathbb{R})$ an, deren Spalten die Vektoren $v_1, \dots, v_5$ sind.

c) (3 P.) Finden Sie ein lineares Gleichungssystem derart, dass V der Lösungsraum ist. Untersuchen Sie hierfür den Nullraum der Matrix A aus Teil a).

Begründen Sie jedesmal, warum die Vorgehensweise zu einer Lösung führt. **Keine Punkte für Teil a), wenn Sie lediglich Ihre Antwort zu Teil b) wiederholen.**

Aufgabe 3: Sei V ein n-dimensionaler k-Vektorraum.

a) (3 P.) Sei $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V. Für $1 \leq i \leq n$ sei $b_i^* \colon V \to k$ die lineare Abbildung, die eindeutig durch $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq j \leq n$ gegeben wird. Zeigen Sie, dass $b_1^*, \dots, b_n^*$ eine Basis des Dualraums V^* bilden, die sogenannte *Dualbasis*.

b) (2 BP.) Betrachten wir in $\mathbb{R}^2$ die Standardbasis e_1, e_2 und die Basis $b_1 = (1, 0)$, $b_2 = (1, 1)$. Berechnen Sie die Dualbasis-Elemente $e_1^*, e_2^*, b_1^*, b_2^*$ (z.B. lautet die Lösung für e_1^* so: $e_1^*(x, y) = x$). Es ist $b_1 = e_1$. Gilt auch $b_1^* = e_1^*$?

c) (*) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum. Sei $U^\circ \subseteq V^*$ der sogenannte *Annullator* $U^\circ = \{\phi \in V^* \mid \phi(u) = 0 \text{ für jedes } u \in U\}$. Zeigen Sie: U° ist ein Unterraum von V^*.

d) (*) Zeigen Sie $\dim(U) + \dim(U^\circ) = \dim(V)$ [Basis für V geschickt wählen!]

Nominell erreichbare Punktzahl: 16