Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
M.Sc. Mikael Johansson

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07 — Lösungen zu Übungsblatt 9

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Aufgabe 1: (3 P.) Der Dualraum V^* eines k-Vektorraums V wird definiert als $V^* = L(V, k)$.
Zeigen Sie: zu jedem $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ gibt es ein Element $\phi \in V^*$ des Dualraums mit $\phi(v) = 1$. Setzen Sie hierfür voraus, dass V endlich erzeugt ist.

Lösung: Da V endlich erzeugt ist, können wir ein Basis $v_1, \ldots, v_n$ für V festlegen. Dann ist $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, mit $(a_1, \ldots, a_n)$ eindeutig festgelegt. Sei i der kleinste Zahl i mit $a_i \neq 0$. So ein i gibt es, denn $v \neq 0$. Dann können wir die Abbildung $\phi(b_1v_1 + \cdots + b_nv_n) = b_i/a_i$ bilden. Diese Abbildung ist linear, denn es entspricht der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1/a_i & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und hat auch dazu die Eigenschaft dass $\phi(v) = \phi(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_i/a_i = 1$.
Alternativ kann man so Argumentieren:
Sei $v_1 = v$. Da $v \neq 0$ ist dies ein linear unabhängiges System in V. Dieses kann zu einen Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V ergänzt werden. Nun, für jede Liste $w_1, \ldots, w_n \in k$ gibt es, nach dem Satz über lineare Fortsetzungen, eine lineare Abbildung, die v_i auf w_i abbildet. Setzen wir $w_1 = 1$ und w_i beliebig, so ist der Aussage bewiesen.

Aufgabe 2: Für $v \in V$ betrachten wir die sogenannte Auswerteabbildung $e_v : V^* \to k$, die durch $e_v(\phi) := \phi(v)$ gegeben wird.

a) (3 P.) Zeigen Sie, dass e_v eine lineare Abbildung ist und somit im Doppeldual $V^{**} = (V^*)^*$ liegt.

*b) Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung $v \mapsto e_v$ eine lineare Abbildung ist.

*c) Folgern Sie aus Aufgabe , dass diese Abbildung $V \to V^{**}$ auch injektiv ist.

Lösung:

a) Sind $\phi, \psi \in V^*$ und $\mu \in k$, so ist $e_v(\mu\phi) = \mu\phi(v) = \mu e_v(\phi)$, und $e_v(\phi+\psi) = (\phi+\psi)(v) = \phi(v)+\psi(v) = e_v(\phi) + e_v(\psi)$. Somit ist die Abbildung linear.

   Weiterhin, da e_v linear ist, und $e_v(\phi) = \phi(v) \in k$, ist $e_v \in L(V^*, k) = (V^*)^* = V^{**}$.

b) Damit $\epsilon : v \mapsto e_v$ linear ist, muss $\epsilon(\lambda v + \mu w) = \lambda\epsilon(v) + \mu\epsilon(w)$ für $v, w \in V$ und $\mu, \lambda \in k$.

   Nun ist $\epsilon(\lambda v + \mu w) = e_{\lambda v+\mu w}$, und das ist die Abbildung, die ϕ auf $\phi(\lambda v + \mu w)$ abbildet, für lineare Abbildungen $\phi : V \to k$. Da ϕ linear ist, ist $e_{\lambda v+\mu w}(\phi) = \phi(\lambda v + \mu w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w)$. Das, wiederum ist genau $(\lambda e_v + \mu e_w)(\phi)$.

Weil das alles für alle lineare $\phi\colon V \to k$ gilt, ist $\epsilon(\lambda v + \mu w)$ die Abbildung, die ϕ auf $(\lambda e_v + \mu e_w)(\phi)$ abbildet, und somit ist es genau die Abbildung $\lambda\epsilon(v) + \mu\epsilon(w)$.

c) Angenommen die Abbildung wäre nicht injektiv. Dann gäbe es ein Vektor $v \in \operatorname{Kern}\epsilon$. Dann könnten wir aber, nach , einen ϕ finden mit $\phi(v) = 1$, denn $v \neq 0$. Dann ist $\epsilon(v)(\phi) = \phi(v) = 1$, aber $v \in \operatorname{Kern}\epsilon$. Dies ist ein Widerspruch, und wir können feststellen, ϵ muss injektiv sein.

Aufgabe 3: (3 BP.) Die lineare Abbildung $\phi\colon V \to V$ habe die Eigenschaft $\phi \circ \phi = \phi$. Zeigen Sie, es ist $V = \operatorname{Kern}(\phi) \oplus \operatorname{Bild}(\phi)$.

Lösung: Nehmen wir ein Vektor $v \in V$. Da $\phi(v) \in \operatorname{Bild}(\phi)$ liegt, wird $v - \phi(v)$ auf $\phi(v) - \phi(\phi(v))$ abgebildet. Nun ist ja aber $\phi(\phi(v)) = \phi(v)$, und somit wird $v - \phi(v)$ auf $\phi(v) - \phi(v) = 0$ abgebildet.
Somit ist $v - \phi(v) \in \operatorname{Kern}(\phi)$, und wir können feststellen, dass $v = w + u$ mit $w \in \operatorname{Bild}(\phi)$ und $u \in \operatorname{Kern}(\phi)$.
Ist nun $v = w + u$ so dargestellt, dann ist $\phi(v) = \phi(w) + \phi(u)$, und da $u \in \operatorname{Kern}(\phi)$ ist $\phi(u) = 0$. Da $w \in \operatorname{Bild}(\phi)$ liegt, ist $w = \phi(w')$, und somit $\phi(w) = \phi(\phi(w')) = \phi(w') = w$. Daher ist w eindeutig bestimmt von v, und somit auch $u = v - w$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ der linearen Abbildung $f\colon V \to W$ bezüglich den Basen B für V und C für W.

a) (2 P.) Im Fall $W = k^3$; $V =$ Lösungsraum von $x + y + z = 0$; $f =$ Inklusion $f(v) = v$; $B = (1, 0, -1)$, $(1, -2, 1)$; $C = e_1, e_2, e_3$.

b) (*) Im Fall $V = k^3$; $W = k^2$; $f(x, y, z) = (x, z)$; $B = e_1, e_2, e_3$; $C = (1, 2)$, $(1, 3)$.

c) (2 P.) Im Fall $V = W = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (y, x)$; $B = (1, 1)$, $(2, 1)$; $C = (0, 1)$, $(-1, -3)$.

d) (*) Berechnen Sie auch ${}_C\mathrm{M}_B(f)$ für die f, V, W, B, C aus c).

Lösung: Allgemein gilt, dass ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ als Matrix gegeben wird, durch die Bilde von den Basisvektoren in B, geschrieben als Linearkombinationen von C, mit den benutzten Koeffizienten als Spaltenvektoren aufgeführt.

a) Die Bilder der Basisvektoren sind, da C gerade die Standardbasis ist, genau die Basisvektoren als hier gegeben. Daher wird ${}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Hier ist $f(e_1) = (1, 0) = 3(1, 2) - 2(1, 3)$, $f(e_2) = (0, 0)$ und $f(e_3) = (0, 1) = -1(1, 2) + (1, 3)$, und wir können die drei Spaltenvektoren der Matrix $(3, 2)$, $(0, 0)$ und $(-1, 1)$ ablesen, was uns ${}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ gibt.

c) Hier ist $f(1, 1) = (1, 1) = -2(0, 1) - (-1, -3)$ und $f(2, 1) = (1, 2) = -(0, 1) - (-1, -3)$, was uns die Spalten $(-2, -1)$ und $(-1, -1)$ ergibt, und somit ${}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Für ${}_C\mathrm{M}_B(f)$ betrachten wir zuerst $f(0, 1) = (1, 0) = -(1, 1) + (2, 1)$ und dann $f(-1, -3) = (-3, -1) = (1, 1) - 2(2, 1)$, und lesen die Matrix ${}_C\mathrm{M}_B(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ ab.

Aufgabe 5: (3 P.) Finden Sie eine Basis C von $\mathbb{R}^2$ derart, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ der durch $f(x,y,z) = (3y - z, x + z)$ definierte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ den Wert

$$ {}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

annimt, wobei B die Basis $(2,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-3,1,3)$ des $\mathbb{R}^3$ ist.
(*) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ auch von der Reihenfolge der Basiselemente in den Basen B, C abhängt.

Lösung: Wir brauchen Basisvektoren v_1, v_2 mit $f(2,1,1) = v_1$, $f(1,1,-1) = v_2$. Das $f(-3,1,3) = 0$ können wir leicht verifizieren, oder auch von der letzte Spalte von ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ ablesen.
Zu diesem Zwecke berechnen wir $f(2,1,1) = (2,3)$ und $f(1,1,-1) = (4,0)$. Diese sind unsere v_1 und v_2.
Für die Abhängigkeit von der Reihenfolge der Basiselemente können wir dieses Beispiel nehmen. Sind C' der Basis $(4,0)$ und $(5,3)$, und B' der basis $(-3,1,3)$, $(1,1,-1)$ und $(2,1,1)$ in diese Reihenfolgen. Dann ist

$$ {}_{B'}\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

und

$$ {}_B\mathrm{M}_{C'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

Aufgabe 6: (3 P.) Zeigen Sie: jede Kette von elementaren Zeilenoperationen lässt sich durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix bewirken.
Hinweis Ein Beispiel einer Kette der Länge drei ist: zuerst die 2. und 4. Zeilen vertauschen; dann das $\sqrt{2}$-fache der 3. Zeile von der 1. Zeile abziehen; dann die 1. Zeile zur 4. Zeile addieren.

Lösung: Jede elementare Zeilenoperation ist die Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix (in die Vorlesung erwähnt). Daher gilt es festzustellen, dass auch eine Kette solche Operationen sich durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix bewirken lässt.
Nun, sind die einzelne Matrizen durch Linksmultiplikation mit den Matrizen $M_1, \ldots, M_r$ gegeben. Dann ist die Kette durch den Matrix $(M_r \ldots M_1)$. Wenn diese Matrix nun invertierbar ist, dann sind wir fertig. Und, es ist tatsächlich so: $M_1^{-1} \ldots M_r^{-1} M_r \ldots M_1$ ist die Identitätsmatrix, und somit ist die Aussage bewiesen.

Aufgabe 7: (3 BP.) Finden Sie eine Kette von Zeilenoperationen, die die Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ in die Matrix B überführt, für

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} $$

(*) Versuchen Sie, mit möglichst wenig Zeilenoperationen auszukommen. Ich benutzte fünf Operationen, um die Aufgabe zu entwerfen, vielleicht geht es aber mit weniger.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Tausche erste und zweite Zeile} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Zweite Zeile mit 2 multipliziert} &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Erste Zeile} \rightarrow \text{Erste minus zweite Zeile} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
\text{Dritte Zeile mit } -3 \text{ multipliziert} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \\
\text{Zweite Zeile zu dritte addiert} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Erreichbare Punktzahl: 16