Friedrich-Schiller-Universität Jena
Mathematisches Institut
Prof. Dr. David J. Green

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 2006/07 — Übungsblatt 9

Abgabe: Mi 13.12. in der Vorlesung.

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Zur Erinnerung: Erhalten Sie alle regulären Punkte (2 P.), so erreichen Sie 100%. Durch Bonuspunkte (3 BP.) können Sie sogar mehr als 100% bekommen. Keine Punkte bekommen Sie für Stern-Aufgaben (*).

Aufgabe 1: (3 P.) Der Dualraum V^* eines k-Vektorraums V wird definiert als $V^* = L(V, k)$.

Zeigen Sie: zu jedem $v \in V$ mit $v \neq 0_V$ gibt es ein Element $\phi \in V^*$ des Dualraums mit $\phi(v) = 1$. Setzen Sie hierfür voraus, dass V endlich erzeugt ist.

Aufgabe 2: Für $v \in V$ betrachten wir die sogenannte Auswerteabbildung $e_v \colon V^* \to k$, die durch $e_v(\phi) := \phi(v)$ gegeben wird.

a) (3 P.) Zeigen Sie, dass e_v eine lineare Abbildung ist und somit im Doppeldual $V^{**} = (V^*)^*$ liegt.

*b) Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung $v \mapsto e_v$ eine lineare Abbildung ist.

*c) Folgern Sie aus Aufgabe 1, dass diese Abbildung $V \to V^{**}$ auch injektiv ist.

Aufgabe 3: (3 BP.) Die lineare Abbildung $\phi \colon V \to V$ habe die Eigenschaft $\phi \circ \phi = \phi$. Zeigen Sie, es ist $V = \mathrm{Kern}(\phi) \oplus \mathrm{Bild}(\phi)$.

Aufgabe 4: Berechnen Sie die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ der linearen Abbildung $f \colon V \to W$ bezüglich den Basen B für V und C für W.

a) (2 P.) Im Fall $W = k^3$; $V =$ Lösungsraum von $x+y+z = 0$; $f =$ Inklusion $f(v) = v$; $B = (1, 0, -1), (1, -2, 1)$; $C = e_1, e_2, e_3$.

b) (*) Im Fall $V = k^3$; $W = k^2$; $f(x, y, z) = (x, z)$; $B = e_1, e_2, e_3$; $C = (1, 2), (1, 3)$.

c) (2 P.) Im Fall $V = W = \mathbb{R}^2$; $f(x, y) = (y, x)$; $B = (1, 1), (2, 1)$; $C = (0, 1), (-1, -3)$.

d) (*) Berechnen Sie auch ${}_C\mathrm{M}_B(f)$ für die f, V, W, B, C aus c).

Bitte wenden

Aufgabe 5: (3 P.) Finden Sie eine Basis C von $\mathbb{R}^2$ derart, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ der durch $f(x,y,z) = (3y - z, x + z)$ definierte lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ den Wert

$$ {}_B\mathrm{M}_C(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

annimt, wobei B die Basis $(2,1,1)$, $(1,1,-1)$, $(-3,1,3)$ des $\mathbb{R}^3$ ist.

(*) Geben Sie ein Beispiel, das zeigt, dass die Matrix ${}_B\mathrm{M}_C(f)$ auch von der Reihenfolge der Basiselemente in den Basen B, C abhängt.

Aufgabe 6: (3 P.) Zeigen Sie: jede Kette von elementaren Zeilenoperationen lässt sich durch Linksmultiplikation mit einer invertierbaren Matrix bewirken.

Hinweis Ein Beispiel einer Kette der Länge drei ist: zuerst die 2. und 4. Zeilen vertauschen; dann das $\sqrt{2}$-fache der 3. Zeile von der 1. Zeile abziehen; dann die 1. Zeile zur 4. Zeile addieren.

Aufgabe 7: (3 BP.) Finden Sie eine Kette von Zeilenoperationen, die die Matrix $A \in M(3 \times 3, \mathbb{R})$ in die Matrix B überführt, für

$$ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix} $$

(*) Versuchen Sie, mit möglichst wenig Zeilenoperationen auszukommen. Ich benutzte fünf Operationen, um die Aufgabe zu entwerfen, vielleicht geht es aber mit weniger.

Nominell erreichbare Punktzahl: 16