

Lineare Algebra und Analytische Geometrie 1

Wintersemester 06/07

Lösungen zu Übungsblatt 8

Wenn nichts anderes gesagt wird, ist k ein Körper und V ein Vektorraum.

Auf Anregung der ÜbungsgruppenleiterInnen mache ich ab sofort ein paar Änderungen bei den unbepunkteten Aufgaben. Jetzt gibt es reguläre Punkte (1 P.), Bonuspunkte (1 BP.) und Stern-Aufgaben (*). Holen Sie alle regulären Punkte – meistens sind es 16 – und keine Bonuspunkte, so erreichen Sie 100%. Auf dem vorliegenden Übungsblatt zum Beispiel können Sie mit Bonus- und regulären Punkten insgesamt 125% erreichen.

Neu sind die Stern-Aufgaben. Diese können z.B. Wiederholungs- oder anspruchsvolle Aufgaben sein. Für die Bearbeitung von Stern-Aufgaben erhalten Sie *keine* Punkte. In der Regel werden die Stern-Aufgaben auch nicht in der Übungsstunde besprochen – aber doch in meiner Sprechstunde: Mo 14-15 Uhr im Raum 3512, E-Abbe-Platz 2.

Aufgabe 1: Ist die angegebene Abbildung linear?

- a) (1 P.) $f: k^2 \rightarrow k^2, f(x, y) = (-y, -x)$
- b) (1 P.) $f: k^2 \rightarrow k, f(x, y) = x + y + 1$
- c) (1 P.) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ (für $k = \mathbb{C}$)
- d) (1 P.) $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, f(z) = \bar{z}$ (für $k = \mathbb{R}$)
- e) (*) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|$
- f) (*) $f: k^3 \rightarrow k, f(x, y, z) = (x - 1) + (y - 1) - 2(z - 1)$.

Lösung:

- a) Ja, denn $f(\lambda(x, y) + \mu(x', y')) = f(\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y') = (-\lambda x - \mu x', -\lambda y - \mu y') = \lambda(-x, -y) + \mu(-x', -y') = \lambda f(x, y) + \mu f(x', y')$.
- b) Nein, denn z.B. $1 = f(0, 0) \neq f(0, 0) + f(0, 0) = 1 + 1 = 2$.
- c) Nein, denn z.B. $f(iz) = \bar{iz} = -i\bar{z} \neq i\bar{z}$. Die Skalarmultiplikation schlägt schief.
- d) Ja, denn $f(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda x + \mu y} = \overline{\lambda x} + \overline{\mu y} = \bar{\lambda} \cdot \bar{x} + \bar{\mu} \cdot \bar{y}$, und da $\lambda, \mu \in k = \mathbb{R}$ folgt $\bar{\lambda} = \lambda$ und $\bar{\mu} = \mu$, und daher ist $\bar{\lambda} \cdot \bar{x} + \bar{\mu} \cdot \bar{y} = \lambda \bar{x} + \mu \bar{y} = \lambda f(x) + \mu f(y)$.
- e) Nein, denn z.B. $f(-2) = 2$, aber mit $2 = (-1) \cdot 2$ wäre $f(-2) = f((-1) \cdot 2) = (-1) \cdot f(2) = -2$ zu erwarten.

- f) Ja, denn $(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = x + y - 2z$, ist linear, denn $(x+y-2z) + (x'+y'-2z') = (x+x') + (y+y') - 2(z+z')$, und $\lambda(x+y-2z) = (\lambda x) + (\lambda y) - 2(\lambda z)$.

Aufgabe 2: Zur Erinnerung: eine Matrix $A \in M(m \times n, k)$ induziert eine lineare Abbildung $L_A: k^n \rightarrow k^m$, $v \mapsto A \cdot v$.

- a) (2 P.) Berechnen Sie $L_M(u)$ für $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R})$ und $u = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$.
- b) (2 P.) Weisen Sie im allgemeinen Fall nach, dass L_A tatsächlich linear ist.
- c) (2 P.) Sei B eine weitere Matrix derart, dass das Produkt AB existiert. Zeigen Sie: die Verknüpfung $L_A \circ L_B$ existiert, und es ist $L_A \circ L_B = L_{AB}$.
- d) (2 BP.) Geben Sie ein Beispiel für Vektorräume U, V, W und lineare Abbildungen $g: U \rightarrow V$, $f: V \rightarrow W$ mit $f, g \neq 0$ aber $f \circ g = 0$.
- (*) Finden Sie ein solches Beispiel mit $U = V = W$ und $f = g$?

Lösung:

- a) Um $L_M(u)$ auszurechnen brauchen wir die Matrixprodukt $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ausrechnen. Dies ist

$$\begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- b) Wir setzen $A = (a_{ij})$, $v = (v_i)$ und $w = (w_i)$, mit $v, w \in k^n$, und A eine $m \times n$ -Matrix. Weiterhin nehmen wir $\lambda, \mu \in k$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \lambda L_A(v) + \mu L_A(w) &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot v + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot w \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \dots + a_{1n}w_n \\ \vdots \\ a_{m1}w_1 + \dots + a_{mn}w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11}v_1 + \dots + \lambda a_{1n}v_n \\ \vdots \\ \lambda a_{m1}v_1 + \dots + \lambda a_{mn}v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu a_{11}w_1 + \dots + \mu a_{1n}w_n \\ \vdots \\ \mu a_{m1}w_1 + \dots + \mu a_{mn}w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11}v_1 + \dots + \lambda a_{1n}v_n + \mu a_{11}w_1 + \dots + \mu a_{1n}w_n \\ \vdots \\ \lambda a_{m1}v_1 + \dots + \lambda a_{mn}v_n + \mu a_{m1}w_1 + \dots + \mu a_{mn}w_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}(\lambda v_1 + \mu w_1) + \dots + a_{1n}(\lambda v_n + \mu w_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(\lambda v_1 + \mu w_1) + \dots + a_{mn}(\lambda v_n + \mu w_n) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot (\lambda v + \mu w) \\ &= L_A(\lambda v + \mu w) \end{aligned}$$

- c) Damit die Produkt AB definiert ist, wird verlangt, daß A ein $m \times a$ -Matrix und B ein $a \times n$ -Matrix sind. Die Produkt wird dadurch ein $m \times n$ -Matrix. Wenn dies der Fall ist, ist $A \cdot v$ ein Element in k^a , und damit in den richtigen Vektorraum, damit L_B darauf wirken kann. Somit existiert die Verknüpfung $L_A \circ L_B$. Dies ist dann $L_A(B \cdot v) = A \cdot (B \cdot v)$, welches wegen der Assoziativität der Matrixmultiplikation gleich $AB \cdot v$ ist.
- d) Ein Beispiel wäre $U = V = W = k^2$, und $f = g = L_{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$. Dann ist $f, g \neq 0$, aber $f \circ g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3: Sei $A \in M(m \times n, k)$ eine Matrix. Beachten Sie, dass die Spalten von A als ein System von n Vektoren in k^m aufgefasst werden können. Das von diesem System erzeugten Unterraum von k^m heißt der Spaltenraum von A .

- a) (2 P.) Finden Sie eine Basis des Spaltenraums der reellen Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- b) (2 P.) Für jede Matrix A zeigen Sie: die Abbildung L_A ist genau dann injektiv, wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.
- c) (2 BP.) Zeigen Sie ferner: der Spaltenraum stimmt mit dem Bild von L_A überein.

Lösung:

- a) Hierzu können wir feststellen, dass $(1, 1, 2) = (1, 0, 1) + (0, 1, 1)$, und somit dass wir sowohl $(0, 0, 0)$ als auch $(1, 1, 2)$ aus dem Erzeugendensystem streichen können. Es bleibt uns dann $(1, 0, 1)$ und $(0, 1, 1)$, welche durch betrachten der erste und zweite Koordinat sich als linear unabhängig beweisen lassen: ist $\lambda(1, 0, 1) + \mu(0, 1, 1) = 0$, so ist wegen der erste Koordinat $\lambda = 0$, und wegen der zweiten $\mu = 0$.

Da wir immer noch $(0, 0, 0)$ und $(1, 1, 2)$ aus diese beide unabhängige Vektoren darstellen können, erzeugen diese beide Vektoren den gesamten Spaltenraum.

- b) Sind erst mal $v_1, \dots, v_n$ die Spalten von A . Dann wird, durch die Matrixmultiplikation, den Vektor $w = (w_1, \dots, w_n)$ auf $w_1 v_1 + \dots + w_n v_n$ abgebildet. Daher, wenn $L_A(w) = L_A(u)$, für $u = (u_1, \dots, u_n)$, dann ist $L_A(w) - L_A(u) = 0$, und somit ist $(w_1 - u_1)v_1 + \dots + (w_n - u_n)v_n = 0$.

Wenn, nun, die Spaltenvektoren linear unabhängig sind, dann muss jede $w_i - u_i = 0$ sein, denn sonst hätten wir eine lineare Abhängigkeit gefunden. Daher ist aus $w = u$, denn sie stimmen in jeder Koordinat überein. Also impliziert lineare unabhängigkeit die Injektivität.

Wenn, aber, wir wissen dass L_A injektiv ist. Angenommen $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$, dann ist, für $a = (a_1, \dots, a_n)$, $L_A(a) = 0 = L_A(0)$. Aus der Injektivität folgt dann $a = 0$, und somit $a_i = 0 \forall i$, welches die lineare Unabhängigkeit der v_i zeigt.

- c) Ist $v \in \text{Bild}(L_A)$, dann ist $v = L_A(w)$ für $w = (w_1, \dots, w_n)$. Daher ist, durch die Linearität von L_A , $v = w_1 L_A(e_1) + \dots + w_n L_A(e_n)$ für die Standardbasis $e_1, \dots, e_n$. Da, nun, $L_A(e_i)$ genau die i . Spalte entspricht können wir feststellen, daß der Bild in der Spaltenraum enthalten ist.

Ist andererseits v in den Spaltenraum, so ist $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, und daher ist $v = L_A((a_1, \dots, a_n))$, und somit auch in den Bild. Daher ist der Spaltenraum auch im Bild enthalten, und die Gleichheit ist gezeigt.

Aufgabe 4: Herr X will alles über die geheime Abbildung der Firma Y herausfinden und beauftragt daher die Privatdetektiven Müller, Schmidt und Meier. Herr Müller durchsucht die Mülleimer der Firma und findet heraus, dass es sich um eine lineare Abbildung $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ handelt. Kurz darauf liefert Frau Schmidts Trojaner die Information, dass die Vektoren $(1, 0, 1, 1)$ und $(2, 1, 0, 1)$ im Kern von g liegen. Am nächsten Abend spielt Herr Meier Skat in der Kneipe um die Ecke vom Firmensitz und kriegt raus, dass $(1, 0, 2)$ und $(2, 1, 1)$ im Bild von g liegen.

(2 P.) Als wissenschaftliche Schreibkraft des Detektivbüros müssen Sie jetzt Herrn X die Dimension vom Kern und vom Bild von g melden.

(*) Auf der Häkelmechanik-Messe HäMe 2006 musste Herr X eine angeberische Präsentation der Firma Y erleben. Besonders beängstigend für ihn war die Ankündigung, dass auch sein Lieblingsvektor $(1, 1, 0)$ im Bild von g liegt. Deckt sich diese prahlerische Behauptung mit den Erkenntnissen von Müller, Schmidt und Meier?

Lösung: Wir wissen über g dass

- a) $(1, 0, 1, 1)$ und $(2, 1, 0, 1)$ im Kern liegen
- b) $(1, 0, 2)$ und $(2, 1, 1)$ im Bild liegen
- c) $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$, und daher ist g durch eine 3×4 -Matrix gegeben.

Da $(1, 0, 1, 1)$ und $(2, 1, 0, 1)$ linear unabhängig (betrachte die dritte Koordinate) sind, hat der Kern mindestens Dimension 2.

Da $(1, 0, 2)$ und $(2, 1, 1)$ linear unabhängig sind (betrachte die zweite Koordinate), hat der Bild mindestens Dimension 2.

Die Dimensionsformel für Abbildungen sagt uns, dass

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim \text{Kern} + \dim \text{Bild}$$

und daher dass $\dim \text{Kern} + \dim \text{Bild} = 4$. Da wir wissen, dass beide mindestens Dimension 2 haben, müssen beide genau Dimension 2 haben.

Wenn $(1, 1, 0)$ linear unabhängig von $(1, 0, 2)$ und $(2, 1, 1)$ ist, dann kann $(1, 1, 0)$ gar nicht im Bild liegen, denn wir haben schon eine Basis für den Bild.

Ist nun $\lambda(1, 1, 0) + \mu(1, 0, 2) + \kappa(2, 1, 1) = 0$, dann ist wegen der zweiten Koordinate $\lambda + \kappa = 0$, und wegen der dritten $2\mu + \kappa = 0$. Also ist $\kappa = -\lambda$ und $\mu = \lambda/2$. Dann sagt uns der erste Koordinate, dass $\lambda + \mu + 2\kappa = 0$, und durch einsetzen erhalten wir $\lambda + \lambda/2 + 2(-\lambda) = -\lambda/2 = 0$, und von daher ist $\lambda = 0$, und damit auch $\kappa = \mu = 0$, und somit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Und da sie linear unabhängig sind, spannen sie auch einen Unterraum von grösserer Dimension als der Bild von g , und daher kann $(1, 1, 0)$ nicht im Bild liegen.

Erreichbare Punktzahl: 16